**Triangles à côtés entiers (Toutes séries)**

**Éléments de solution**

**1. *a.*** (4, 4, 5) est le seul qui réponde à la définition.

On trace un segment [BC] de longueur 5. Le cercle de centre B de rayon 4 coupe la médiatrice de [BC] en deux points. A est l’un d’eux.

***b.*** En appliquant la définition .

***c.*** C’est l’inégalité stricte qui manque : Une fois déclaré le plus grand, le fait que la longueur de chaque côté soit inférieure à la différence des longueurs des deux autres est acquis.

**2. *a.*** Comme Il s’ensuit que La plus petite valeur de est celle pour laquelle les trois côtés sont de même longueur, 6.

***b.*** Pour énumérer les éléments de , on tient compte du fait que les deux plus petits côtés ont des longueurs et telles que . On obtient :

. Le triangle est représenté ci-dessus.

**3. *a.***  L’inégalité est transportée lorsqu’on ajoute 1 au plus petit membre et 2 au plus grand, la somme est la bonne.

***b.*** Pour que le triplet appartienne à , il faut que , c’est-à-dire Comme on a affaire à des entiers vérifiant , il suffit que et que d’autre part pour que le nouveau triangle en soit un.

***c.*** Si est impair, l’égalité est impossible, attendu que doit être pair. Il n’y a pas de triplet dans , car et conduisent à , ou , ce qui fait de la plus grande longueur à égalité avec , mais est impair, puisque est pair. Les deux ensembles ont le même nombre d’éléments.

**4. Étude de .**

***a.*** Oui, car

***b.*** Deux sortes de triangles isocèles sont a priori possibles : ceux dont les côtés égaux ont la plus petite longueur et ceux dont les côtés égaux ont la plus grande. Les triplets tels que et vérifient car . On a donc .

Les triplets tels que vérifient et donc .

Il y a en tout triangles isocèles non équilatéraux dans

***c.*** Le triplet correspond à un triangle rectangle de périmètre si et

On a donc :

.

Mais ce dernier nombre est pair. Donc le problème n’a pas de solution.

**5. *a.*** Ces conditions sont celles données dans la définition.

***b.*** La somme des trois longueurs vaut bien , les deux conditions imposent , donc , et qui donne l’ordre.

***c.*** Le triangle – appelé ici ABC par commodité - est reproduit sur la figure de droite. L’angle droit est à l’intersection des droites de pentes 1 et −1. Les points à coordonnées entières de la droite d’équation sont les points d’abscisse entière comprise entre l’abscisse de A (506) et celle de B (674). Les points à coordonnées entières sur le côté [AC] d’équation sont aussi ceux dont l’abscisse est entière supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 506. Les points à coordonnées entières sur le côté [BC] sont aussi ceux dont l’abscisse est paire (l’équation de la droite est ) et comprise entre 2 et 674.

Au total, cela en fait 1 011, mais les sommets du triangle ont été comptés chacun deux fois. L’effectif cherché est donc 1 008. L’aire du triangle rectangle est (demi-produit des longueurs des cathètes).

***d.*** On utilise la formule pour trouver le nombre de points intérieurs à partir de l’aire et du nombre de points sur le périmètre (attention à ne pas compter A, B et C deux fois). On trouve le nombre de triplets dans , qui est le même d’après la question **3.** que dans :

**6. Une solution algorithmique**

Le programme doit permettre de faire la liste des triplets d’entiers pour lesquels , , et . On commencera par déterminer les valeurs extrêmes de , ce qui nécessite d’étudier la parité et la divisibilité par 3 de On distinguera 6 cas :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Il existe un entier tel que :* | Valeur maximale de  | Valeur minimale de  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Une fois déterminés ce minimum et ce maximum, on programme une boucle de à . Dans cette boucle, à chaque valeur de sont associées successivement les valeurs de allant de à (*partie entière*). À chacune des valeurs de correspond une seule valeur de telle que et

*Autre déroulé*: on peut aussi utiliser une boucle **For** sur la plus petite des longueurs, , et à chaque tour de boucle boucler sur

**Premières fois (Série S)**

**Éléments de solution**

**1.** En écrivant et en appliquant la définition : .

On poursuit :

Supposons que pour un entier naturel sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, on ait :

En appliquant la définition, on obtient : , ce qui donne, en utilisant notre hypothèse .

Finalement pour tout entier premier et tout entier naturel supérieur ou égal à  : .

**2. *a.***

***b.*** On applique le résultat précédent à On obtient .

Le second membre de l’égalité est bien multiple de .

**3.**Le nombre peut être écrit , les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de étant les mêmes et avec les mêmes exposants que dans la décomposition de , sauf évidemment . Avec cette écriture, .

La prochaine étape fera apparaître le produit , où fait apparaître les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de avec les mêmes exposants, sauf et etc. D’où le résultat :

.

**4.**Pour un nombre premier le calcul est rapide, et donc .

Pour le produit de deux nombres entiers et , on peut, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de « étiqueter » les nombres premiers qui figureraient à la fois dans les décompositions de et de en les traitant comme des premiers distincts. On adapte la formule ci-dessus donnant , en convenant par exemple pour calculer de remplacer par 0 si l’entier premier apparaît dans la décomposition de mais pas dans celle de On aurait, en adaptant les notations : , . La somme fait alors apparaître des termes comme , mais (c’est aussi le quotient de par ), et donc ce terme est exactement , où est le quotient de par et l’exposant de dans la décomposition de

Conclusion : les *propriétés* imposées permettent de *définir* une application qui les possède. Tout repose évidemment sur l’existence de la décomposition en produit de facteurs premiers, que nous avons admise pour ce problème.

***Étude de quelques images d’entiers par la fonction***

**5. *a.***  , ,

 .

***b.*** Aucun entier composé non nul ne peut satisfaire , car est dans ce cas une somme d’entiers positifs. Les seules solutions sont et

***c.*** Les nombres premiers sont par définition solutions de . Dans la formule donnant en général pour que cette somme de termes positifs soit égale à il faudrait que tous les termes fussent nuls sauf un, égal à Ce n’est pas possible, le produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que s’ils le sont l’un et l’autre.

***d.*** Le nombre n’a pas d’antécédent par . La raison est la même que ci-dessus : il faudrait deux termes égaux à dans la somme permettant le calcul de , ou un terme égal à Mais s’il y a un terme égal à il y en a nécessairement un autre, car (l’un vient de l’exposant).

***e.*** On a donné des exemples de la situation contraire à la question **5. *a.***

**6. *a.*** Si et sont des nombres premiers, on trouve

***b.*** On a trouvé , tandis que La réponse est non.

**7. *a.*** On a trouvé , tandis que et

***b.*** Dans l’hypothèse envisagée, on obtient :

Ou encore : , d’où le résultat, en réorganisant.

***Les points fixes de la fonction***

**8. *a.*** Il existe un entier tel que . On a :

***b.*** s’écrit comme combinaison linéaire des quotients de par les chacun des nombres premiers apparaissant dans sa décomposition. Ces quotients sont des produits des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de , pour chaque terme de la combinaison linéaire, un des exposants a été diminué de Mais un des facteurs premiers peut être « rétabli » par le coefficient qui l’affecte dans la combinaison linéaire, c’est-à-dire par son exposant originel, c’est le cas des nombres qui interviennent avec un exposant qui leur est égal…

**9*.*** D’après ce qui précède, l’exposant originel ne peut être rétabli que dans le cas où .

**AGADADAGA (Séries autres que S)**

**Éléments de solution**

**1.** Les mots inchangés sont ceux qui ne contiennent pas la lettre A.

**Traitement de texte**

**2.** Après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER, on obtient (avant suppression des espaces qui facilitent la lecture) :

 AGADADAGA G AGADADAGA D AGADADAGA D AGADADAGA G AGADADAGA

**3.** Le nombre de A est multiplié par à chaque clic et , il faut donc au minimum 5 clics.

**4.** Après chaque clic, le nombre de D est égal à la somme du double du nombre de A qu’il y avait avant ce clic et du nombre de D qu’il y avait à l’étape précédente. Les effectifs sont donc successivement : , etc. Chaque effectif à partir du deuxième apparaît comme la somme des termes d’une suite géométrique de premier terme et de raison . Après clics, il y a (ce nombre est bien un entier…supérieur à 47 trillions).

**Motif**

**5.** Pour ce motif, le mot obtenu est ADADAGA.

**6.** Le motif correspondant à AGADADAGAGAGADADAGADAGADADAGADAGADADAGAGAGADADAGA est reproduit ci-contre à droite.

**7.** Elle a entré le mot ADAGAGAADADAGA

**8. *a.*** Le motif obtenu (à gauche) est de largeur 1.

***b.*** Le motif obtenu peut avoir une largeur de de 11 carreaux au maximum avec le mot : AGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGA



Toutes les largeurs impaires comprises entre 1 et 11 peuvent être obtenues : pour une largeur 9, il suffit de reprendre le mot précédent et remplacer les six dernières lettres par GADADA ; puis de longueur 7 en remplaçant les 12 dernières lettres par GAGADAGADADA. On obtient de même des mots de largeur 5, 3 ou 1.

On remarque tout d’abord que les traits tracés sont alternativement horizontaux et verticaux quel que soit le mot comprenant 10 D et 10 G : on considère les séquences de 4 lettres en partant de la deuxième lettre du mot, les séquences GADA et DAGA font augmenter la largeur de la partie du motif tracé de 1 carreau, et les séquences GAGA et DADA la font diminuer de 1 carreau. La longueur du mot ne peut donc pas être paire.

***Triangles à côtés entiers (30 points)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** **4 points** | *a.* (4,4,5) *est le bon* | *1 point* |  |
| *b. Encadrement de*  | *2 points* |  |
| *c. Condition supplémentaire* | *1 point* |  |
| **2.****4 points** | *a. Conditions sur*  | *1 point* |  |
| *b. . Le triangle.* | *3 points* | *La figure compte. On n’est pas obligé de* ***vérifier*** *l’alignement* |
| **3.** **4 points** | *a. De à*  | *1 point* |  |
| *b. De à*  | *2 points* |  |
| *c. Et si p impair ?* | *1 point* |  |
| **4.****6 points** | *a. Des triangles équilatéraux ?* | *1 point* |  |
| *b. Des triangles isocèles ?* | *2 points* |  |
| *c. Des triangles rectangles ?* | *3 points* | *On attend un raisonnement* |
| **5.** **8 points** | *a. Les inégalités* | *1 point* |  |
| *b. La réciproque* | *2 points* |  |
| *c. Le triangle. Comptage des points.* | *3 points* |  |
| *d. Décompte final* | *2 point* |  |
| **6.** **4 points** | *Conception d’un programme* | *4 points* | *La mise en forme dans un langage donné n’est pas nécessaire* |
|  |  |  |  |

***Premières fois (30 points)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** **2 points** |  | *2 points* | *L’intuition tiendra lieu d’induction* |
| **2.****3 points** | *a.*  | *2 points* |  |
| *b. multiple de 7* | *1 point* |  |
| **3.** **4 points** |  *Expression de*  | *4 points* | *Ne pas insister sur la mise en forme* |
| **4.** **4 points** | *La fonction définie en* **3.** *Possède les propriétés* | *4 points* | *Ne pas trop miser sur la mise en forme du raisonnement* |
| **5.****6 points** | *a.*  | *2 points* |  |
| *b. ?* | *1 point* |
| *c. ?* | *1 point* |  |
| *d.Tout entier a-t-il un antécédent ?* | *1 point* |  |
| *e. ?* | *1 point* |  |
| **6.** **2 points** | *a. Produit de nombres premiers* | *1 point* | *Déjà vue en* **2.** *comme condition nécessaire* |
| *b. Image du produit et somme des images* | *1 point* |  |
| **7.****3 points** | *a. Conservation de la somme ?* | *1 point* |  |
| *b. Ca peut marcher quand même* | *2 points* |  |
| **8.****4 points** | *a. Cas des multiples de*  | *2 points* |  |
| *b. Perte d’exposant, sauf…* | *2 points* |  |
| **9.****2 points** | *Solutions de*  | *2 points* |  |

***Agadadaga (30 points)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1. 1 point** |  | *1 point* |  |
| **Traitement de texte** |  |  |
| **2. 4 points** | *Avec deux fois EXÉCUTER* | *4 points* | *Attention soutenue à la lecture…* |
| **3. 3 points** | *Un milliard de A* | *3 point* |  |
| **4. 4 points** | *Combien de D après 20 clics ?* | *4 point* |  |
| **Motif** |
| **5.****1 point** | *Quel mot pour*  | *1 point* |  |
| **6.****5 points** |  | *5 points* |  |
| **7.****5 points** | *Le mot oublié :*ADAGAGAADADAGA | *5 points* | *Lecture difficile pour les candidats* |
| **8.****7 points** | *a. Largeur du motif* AGAGADA | *2 points* |  |
| *b. Avec 10 lettres* D *et 10 lettres G, quelles largeurs possibles ?* | *5 points* |  |