**Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)**

**Algorithme linéaire**

**On attend bien sûr que chaque affirmation soit justifiée.**

**D’autres justifications que celles proposées dans le corrigé sont possibles.**

**On valorisera toute recherche, même inachevée, ou toute tentative de justification, même maladroite.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Partie A :** |  | **barème** |
| **1.a** | Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables et à chaque étape de l’algorithme :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Algorithme 1 |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   On a donc bien et . | **1 point** |
| **1.b** | Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables et à chaque étape de l’algorithme :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Algorithme 1 |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   On obtient | **2 points** |
| **1.c** | Il suffit de résoudre le système . Pour cela, on peut soustraire membre à membre ce qui donne . En remplaçant par dans une des deux équations, on obtient . Il reste à vérifier que le couple vérifie bien le système ce qui se fait aisément en remplaçant. | **3 points** |
| **1.d** | Oui, et s’obtiennent linéairement en fonction de et par l’algorithme 1 puisque d’après la question 1c, on a avec et . | **1 point** |
| **2.a** | L’algorithme est bien linéaire puisque chacune de ces instructions est de la forme  ;  ; ou avec un nombre réel.  Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables et à chaque étape de l’algorithme :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Algorithme 2 |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   Cet algorithme échange les valeurs des variables puisqu’on obtient et . | **2 points** |
| **2.b** | Oui, et s’obtiennent linéairement en fonction de et par l’algorithme 2 puisque l’on a avec et . | **1 point** |
| **2.c** | On peut par exemple faire précéder les deux instructions et des neuf instructions de l’algorithme 2 puisque après ces deux instructions on aura et , valeurs que l’on sait permuter à l’aide de l’algorithme 2.  Nous obtenons le même résultat en faisant suivre l’algorithme 2 des instructions et . | **2 points** |
| **3.a** | Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables et à chaque étape de l’algorithme :   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Algorithme 3 |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  |   On a bien comme attendu mais pour avoir , on doit avoir et donc et d’où . | **4 points** |
| **3.b** | Il s’agit maintenant de traiter tous les cas restants :   * Si et alors l’algorithme suivant fournit la réponse.  |  | | --- | |  |  * Si et alors l’algorithme de la question 2c fournit la réponse. * Si et alors l’algorithme 3 fournit la réponse. * Si et alors l’algorithme composé des deux instructions et fournit la réponse. * Si et alors l’algorithme suivant fournit la réponse :  |  | | --- | |  |   Ainsi (puisqu’on a bien traité tous les cas), quelles que soient les valeurs des réels et , on peut trouver un algorithme linéaire tel que les valeurs de fin de l’algorithme de et soient . | **6 points**  (1pt pour chaque sous-cas un peu générique et 1pt si l'élève partitionne correctement tous les cas) |
| **Partie B :** |  |  |
| **1.** | Déjà dans chacune de ces trois instructions, seule la variable est modifiée. Ensuite reçoit successivement les valeurs de 0, de puis de la somme des valeurs de et , qui correspond bien à la seule instruction . | **2 point** |
| **2.** | L’instruction correspond à la succession des trois instructions suivantes :   |  | | --- | |  |   En effet, il est clair que dans ces trois instructions, seule la variable est modifiée. Elle prend successivement les valeurs de 0, de puis de , qui correspond bien à la seule instruction . | **4 points** |
| **3.** | L’instruction correspond à la succession des quatre instructions suivantes :   |  | | --- | |  |   En effet, il est clair que dans ces quatre instructions, seule la variable est modifiée. Elle prend successivement les valeurs de 0, de , de puis de , qui correspond bien à la seule instruction . | **4 points** |

**Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)**

**Suite des entiers dont la somme est divisible par d**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Partie A :** |  | **barème** |
| **1.** | Les 8 premiers termes de la suite *u* sont 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 et 24. | **2 points** |
| **2.** | On note  le nombre entier composé de  centaines,  dizaines et  unités : on a alors .  Si  est divisible par 3, alors il existe un nombre entier *k* tel que .  . Comme  est entier,  est divisible par 3.  Réciproquement, si  est divisible par 3, alors il existe un nombre entier *k*' tel que .  . Comme  est entier,  est divisible par 3. | **4 points** |
| **3.** | Si *x* est un terme de la suite *u*, alors la somme de ses chiffres est divisible par 3. D'après la propriété précédente,  est donc divisible par 3. Alors  est aussi divisible par 3, et d'après la propriété, la somme des chiffres de *x* + 3 est divisible par 3. Ce qui implique que *x* + 3 est un terme de la suite *u*. | **2 points** |
| **4.** | Si *x* est un terme de la suite *u*, alors *x* est divisible par 3, c’est-à-dire qu'il existe un entier *k* tel que *x* = 3*k*.  Alors *x* +1 ne peut être un terme de la suite *u* : en effet, si *x* + 1 était un terme de la suite *u*, alors il existerait un entier *k*' tel que *x* + 1 = 3*k*'. On aurait donc *x* + 1 – *x* = 3*k*' – 3*k*, ou encore 1 = 3(*k*' – *k*) ce qui est impossible vu que *k*' – *k* est un entier.  De même, *x* + 2 ne peut être un terme de la suite *u*.  On en déduit que, quel que soit le terme *x* de la suite *u*, le terme suivant *x* dans cette suite est *x* + 3.  Par conséquent, les écarts maximal et minimal entre deux termes consécutifs sont égaux à 3. | **4 points** |
| **Partie B :** |  |  |
| **1.** | Les trois premiers termes de la suite *v* sont 5, 14 et 19 : les 7 termes suivants sont 23, 28, 32, 37, 41, 46 et 50. | **2 points** |
| **2.** | L'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite *v* est 1 car 49999 et 50000 sont deux termes de la suite *v*. | **2 points** |
| **3.a.** | Soit *x* un terme de la suite *v*; il existe alors un entier positif *k* tel que (*x*) = 5*k*.  Si *x* finit par un chiffre compris entre 0 et 4, alors 0 ≤ *R* < 5.  La division euclidienne de *x* + 5 par 10 s'écrit *x* + 5 = 10*y* + *R* + 5, avec  0 ≤ *R* + 5 < 10.  De fait, (*x* + 5) = (*y*) + *R* + 5 = (*x*) + 5 = 5*k* + 5 = 5(*k* + 1).  Ce qui prouve que *x* + 5 est un terme de la suite *v* si *x* est un terme de *v* finissant par un chiffre compris entre 0 et 4. | **4 points** |
| **3.b** | Soit *x* un terme de la suite *v* ; si *x* finit par un chiffre compris entre 0 et 4, alors *x*' = *x* + 5 est un terme de la suite *v*.  Si *x* finit par un chiffre compris entre 5 et 9, alors *x*' = *x* + 5 finit par un chiffre compris entre 0 et 4.  On peut donc ajouter à *x*' un entier *i* compris entre 0 et 4 en ne changeant que son chiffre des unités. On a alors, pour tout entier 0 ≤ *i* ≤ 4, (*x'+i*) = (*x'*) + *i*. Il suffit de choisir convenablement *i* de sorte que *x*' + *i* soit un terme de la suite *v*.  Pour cela, on examine alors la somme des chiffres de *x*' et en particulier le reste de sa division euclidienne par 5 :   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Reste de la division euclidienne. de (*x'*) par 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | Nouveau terme de la suite *v* | *x*' = *x* + 5 | *x*' + 4 = *x* + 9 | *x*' + 3 = *x* + 8 | *x*' + 2 = *x* + 7 | *x*' + 1 = *x* + 6 |   On en déduit que l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite *v* est inférieur ou égal à 9.  Par conséquent l’écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite *v* est exactement 9 car 5 et 14 sont deux termes consécutifs de la suite. | **4 points** |
| **Partie C** |  |  |
| **a.** | L'entier 111 111 111 999 999 999 est un terme de la suite *w* car la somme de ses chiffres est 90.  L'entier suivant 111 111 112 000 000 000 est aussi un terme de la suite *w* car la somme de ses chiffres est 10.  L'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite *w* est donc 1. | **2 points** |
| **b.** | Soit *x* un terme de la suite *w* ; il existe deux entiers positifs ou nuls *y* et *R* tels que *x* = 10*y* + *R*, avec 0 ≤ *R* < 10.  On ajoute ensuite l'entier *A* = 10 – *R* pour obtenir *x*', sachant que 1 ≤ 10 – *R* ≤ 10.  Alors *x*' = *x* + *A* = 10*y* + *R* +10 – *R* = 10(*y* + 1) + 0 : *x*' finit par le chiffre 0.  On peut donc ajouter à *x*' un entier *i* compris entre 0 et 9 en ne changeant que son chiffre des unités.  On a alors, pour tout entier 0 ≤ *i* ≤ 9, (*x'+i*) = (*x'*) + *i*. On peut choisir convenablement *i* de sorte que *x*' + *i* soit un terme de la suite *w*.  Pour cela, on examine alors la somme des chiffres de *x*' et en particulier le reste de sa division euclidienne par 10 :   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Reste de la d.v.e. de (*x'*) par 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | Nouveau terme de la suite *w* | *x*' = *x* + *A* | *x*' + 9 = *x* + *A* + 9 | *x*' + 8  = *x* + *A* + 8 | *x*' + 7  = *x* + *A* + 7 | *x*' + 6  = *x* + *A* + 6 | |  |  |  |  |  |  | | Reste de la d.v.e. de (*x'*) par 10 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | Nouveau terme de la suite *w* | *x*' + 5  = *x* + *A* + 5 | *x*' + 4  = *x* + *A* + 4 | *x*' + 3  = *x* + *A* + 3 | *x*' + 2  = *x* + *A* + 2 | *x*' + 1  = *x* + *A* + 1 |   On en déduit que l'écart entre deux termes consécutifs de la suite *w* est inférieur ou égal à *A* + 9, c’est-à-dire toujours inférieur ou égal à 19 (vu que *A* est inférieur ou égal à 10). Il en est de même de l'écart maximal.  Enfin, cet écart maximal est exactement 19 puisque 9100 et 9119 sont deux termes consécutifs de la suite *w*. | **4 points** |

**Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats de la série non S)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **Barème** |
| **1.a** | , et .  , et .  Les notes correspondantes sont *re#*, *mi* et *do*. | **2 points** |
| **1.b** | Si les deux premières notes sont *ré* et *mi*, alors et et les termes suivants sont alors :  , , , , , , et . Les dix premières notes sont donc : ré, *mi*, *do*, *mi*, *mi*, *ré*, *do*, ré, ré, mi. | **2 points** |
| **2.** | Comme est le reste d’une division euclidienne par , entier inférieur ou égal à 12, on a et donc . Chaque terme de cette suite correspond donc à une unique note. | **2 points** |
| **3.a** | La mélodie qui commence par les notes *do* et *mi* correspond à la suite :  **0** **; 4 ; 4 ; 8 ; 0 ; 8 ; 8 ; 4 ;** 0; 4 ; 4 ; 8 ; … La suite de notes comporte bien une boucle de période 8. | **3 points** |
| **3.b** | En prenant par exemple *do* et *do#* donc et , on obtient la suite :  **0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 1 ; 9 ; 10 ; 7 ; 5 ; 0 ; 5 ; 5 ; 10 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5 ; 9 ; 2 ; 11 ;** **1** ; 0 ; 1 ; 1 ; …  La suite de notes comporte bien une boucle de période 24. | **3 points** |
| **3.c** | Si la suite commence par *do* ; *do*, on n’a qu’une seule note.  Si la suite commence par *do* ; *fa#*, c’est-à-dire et , on a une boucle de période 3 :  **0 ;** **6 ; 6**; 0 ; 6 ; 6 ; … | **3 points** |
| **4.a** | La situation se traduit par et . On peut reconstituer la suite :  1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 1 ; 9 ; 10 ; **7 ; 5** ; … Les deux premières notes sont *do#* et *ré*. | **3 points** |
| **4.b** | Si on connaît deux notes consécutives quelconques, on peut évidemment en déduire toutes les notes qui suivent. De plus, vu que , il est possible également de reculer et trouver les notes précédentes comme dans la question 4. a).  Par ailleurs, il existe un nombre fini de paires (a ; b), où a et b sont des nombres entiers strictement inférieurs à 12. Or la suite étant infinie, on va donc rencontrer au moins deux fois la paire (a ; b) de deux notes consécutives. Comme on peut « remonter », à partir de n’importe quel couple de notes, aux deux premières notes, on va alors retrouver au moins deux fois ce premier couple de notes.  La mélodie est donc périodique. | **4 points** |
| **4.c** | Le nombre de paires (a ; b) est , donc une période est nécessairement inférieure ou égale à 144. | **3 points** |
| **4.d** | Si la mélodie commence par *la* et *si*, alors et . Par périodicité, le terme 9 apparaît donc une infinité de fois dans la suite . La note *la* apparaît ainsi une infinité de fois dans la mélodie. | **2 points** |
| **5.** | Il y a 144 couples qui donnent chacun une unique mélodie et, réciproquement, toutes les mélodies sont déterminées par leur deux premières notes. Il y a donc 144 mélodies. | **3 points** |