***CORRECTION OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES SUJET ACADEMIQUE 2020***

***Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)***

**Séquences de chiffres**

**Partie A : Quelques exemples**

|  |  |
| --- | --- |
|  | * Le nombre 421 comporte la séquence "2" ,***f2***(421)=1 ; * Le nombre 156 ne comporte pas la séquence "2", ***f2***(156)=0 ; * Le nombre 2 225 comporte la séquence "2", ***f2***(2 225)=1. |
|  | * Le nombre 102 ne comporte pas la séquence "20", ***f20***(102)=0 ; * Le nombre 2 020 comporte la séquence "20",***f20***(2 020)=1 ; * Le nombre 20 ne comporte pas la séquence "2 020",***f2020***(20)=0. |
|  | Pour avoir ***f2 020***(*k*)=1, le nombre *k* doit comporter la séquence "2 020". Il suffit de choisir  *k*=2 020. |
|  | Pour avoir ***f2 020***(*k*)=0, le nombre *k* ne doit pas comporter la séquence "2 020". Il suffit de choisir *k*=2 021. |

**Partie B: Entiers sans la séquence "2"**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *u(*1) correspond au nombre d’entiers ayant 1 chiffre significatif qui ne possède pas la séquence 2. Les seuls nombres à 1 chiffe significatif qui ne comportent pas la séquence "2" sont : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.  *u*(1) = 82 | | | |
|  | * *u(*2) correspond au nombre d’entiers ayant 2 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "2". Les seuls nombres à 2 chiffres significatifs qui ne comportent pas la séquence "2" sont tous les entiers compris entre 10 et 99, soit 90 nombres, à l’exception de tous ceux qui finissent par un 2 (soit 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, et 92) et qui ont 2 comme chiffre des dizaines (20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28 et 29). Il y en a 90−9−9 = 72.   *5u*(2) = 725   * Il faut compter le nombre de nombres à 3 chiffres qui n’ont pas de 2 dans leur écriture. * Il y a 900 nombres à 3 chiffres compris entre 100 et 999. * Il faut retirer les nombres qui ont 2 comme chiffre des unités uniquement.   Pour les nombres compris entre 100 et 200, il faut retirer 102, 112, 122, 132, 142, 152, 162, 172, 182 et 192, soit 10 nombres. Il y a donc 10×9 =90 nombres à 3 chiffres qui possèdent un 2 comme chiffre des unités.   * Il faut retirer les nombres qui ont 2 uniquement comme chiffre des dizaines.   Pour les nombres compris entre 100 et 199, il faut retirer 120, 121, 123, 124, 125, 126, 127, 128 et 129, soit 9 nombres.  Il y a donc 9×9 = 81 nombres à 3 chiffres qui possèdent uniquement un 2 comme chiffre des dizaines.   * Il reste à retirer les nombres qui ont uniquement 2 comme chiffre des centaines, soit tous les nombres compris entre 200 et 299 (100 nombres), à l’exception de 202, 212, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292.   Il y a donc 100−19 = 81 nombres à 3 chiffres qui possèdent uniquement un 2 comme chiffre des centaines.  *2u*(3) = 900−90−81−81 =6485 | | | |
|  | L’algorithme suivant convient : | | |  |
|  | *U*←0 | | | *Compteur* |
|  | **pou**r *i* variant de *10n-1*à 10*n-1* : | | | *on considère tous les nombres à n chiffres* |
|  |  | **si *f2***(*i* )= 1 : | | *détermine si le nombre présente le chiffre 2* |
|  |  | | *U*←U+1 | *ajoute 1 au compteur* |
|  |  | **FinSi** | |  |
|  | **FinPour** | | |  |
|  | *U* ←10*n*−10*n-1* −U | | | *donne le nombre de nombres sans la séquence"2"* |

**Partie C : Entiers sans la séquence "20"**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | w(3) correspond au nombre d’entiers ayant 3 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "20".  Afin de simplifier la rédaction, nous allons écrire les nombres à 3 chiffres sous la forme *abc*, où *a* est unentier naturel compris entre 1 et 9 et *b* et *c*sont des entiers compris entre 0 et 9.   * Il y a 1 000−100 = 900 nombres à 3 chiffres compris entre 100 et 999. * Il faut retirer les nombres qui se terminent par la séquence "20", c’est à dire les nombres sous la forme *a*20.   Il y a 9 possibilités pour le chiffre *a* soit 9 nombres sous la forme *a*20.   * Il faut ensuite retirer les nombres sous la forme 20*c*.   Il y a 10 possibilités pour le chiffre*c*, soit 10 nombres sous la forme 20*c*.  2w(6) = 900 – 9 – 10 =8815 | | | |
|  | Un algorithme possible est le suivant(Ent désigne la partie entière) : | | | |
|  | *s*←0 | | | *Initialisation* |
|  | **tant que***k*> 0 et *s*= 0 : | | | *on continue tant qu’on n’a pas trouvé la séquence "*20" |
|  |  | *u*←*k*−10×Ent (*k*/10) | | *on cherche le chiffre des unités* |
|  |  | *d*← (*k*−*u*)/10−10×Ent ((*k* −*u*)/100) | | *on cherche le chiffre des dizaines* |
|  |  | **si** 10×*d*+*u* =20 : | | *on regarde si les deux derniers chiffres du nombre sont* |
|  |  |  | *s*← 1 | 2 et 0 |
|  |  | **FinSi** | |  |
|  |  | *k*← (*k*−*u*)/10 | | *On considère le nombre sans le chiffre des unités* |
|  | **FinTantque** | | |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Programme en langage Python** : | *k*= int(input("*k*= "))  *s*=0  while *k*>0 and *s*==0:  *u*=*k*– 10\*floor(*k*/10)  *d*=(*k*−*u*)/10 – 10\*floor((*k*−*u*)/100)  if 10\**d*+*u*==20:  *s*=1  else:  *k*=(*k*−*u*)/10  print(*s*) |

**Partie D : Autour du nombre"2 020"**

1. Il faut déterminer le nombre d’entiers ayant 6 chiffres significatifs qui ne possèdent pas la séquence "2020". Écrivons les nombres à 6 chiffres sous la forme *abc def*.

* Il y a 1000000−100000 = 900000 nombres à 6 chiffres compris entre 100000 et 999999.
* Il faut retirer les nombres qui se terminent par la séquence "2020", c’est à dire sous la forme *ab*2 020.

Il y a 9 possibilités pour le chiffre *a* et 10 pour le *b*, soit 9×10 =90 nombres sous la forme *ab*2 020.

* Il faut ensuite retirer les nombres sous la forme *a*20 20*f*.

Il y a 9possibilités pour le chiffre *a* et 10 pour le chiffre *f*, soit9×10 = 90 nombres sous la forme *a*20 20*f*.

* Il reste ensuite retirer les nombres qui commencent par la séquence "2020", c’est à dire sous la forme 202 0*ef*.
* Il y a 10 possibilités pour les chiffres *e* et *f*, soit 10 × 10 = 100 nombres sous la forme 202 0*ef*.
* Le nombre 202 020 a déjà été compté, il y a donc 100−1 =99 nombres sous la forme 202 0*ef*.

1900000−90−90−99 = 899721 nombres à 6 chiffres ne présentent pas la séquence "2020".3

1. Le plus simple est de chercher les nombres avec un même chiffre.

* On constate que le nombre 1 présente une fois la séquence 1 ;
* 11 présente 2 séquences : 1 et 11 ;
* 111 présente 3 séquences : 1 ; 11 et 111 ;
* On en déduit que le nombre constitué de 2020 un (111 … 111 avec 2020 chiffres) présente exactement 2020 séquences.

**PROLONGEMENT :**

1. On peut trouver des nombres qui ont exactement 2020 séquences différentes. Combien de nombres différents présentent exactement 2020 séquences différentes ?
2. On peut trouver des nombres qui ont exactement 2020 séquences différentes. Mais en existe-t-il qui présentent une et une seule fois chaque séquence ? Si oui, combien ?
3. On définit la longueur d'une séquence comme le nombre de chiffres d'une séquence.

Existe-il un nombre qui admet exactement 2020 séquences différentesde longueur *n* ?

Exercice académique numéro2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

**Partie A :**

**I)**

1. On peut s’appuyer sur la figure réalisée avec quatre droites en position générale en rajoutant une cinquième droite ne passant par aucun point d’intersection. Cela donne clairement 5 droites en position générale. Cette 5ème droite va couper les 4 autres droites en 4 points ce qui va partager cette droite en 5 parties (appelées arêtes). Chacune de ces 5 arêtes va rajouter 1 région, on va donc avoir 5 régions supplémentaires d’où . On a et .
2. On raisonne comme au 1) en partant de droites en position générale où l’on rajoute une droite ne passant par aucun point d’intersection. Cette nouvelle droite va couper les droites précédentes en nouveaux points d’intersection qui vont partager cette droite en arêtes. Chacune de ces arêtes va rajouter une région d’où .
3. Voici un algorithme possible ainsi qu’une fonction écrite en Python. Etant donné un entier naturel :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pour allant de à faire |  | defnb\_de\_regions(n):  r = 7  for i in range(3,n):  r = r + i + 1  return r |

On trouve .

1. Il suffit par exemple d’ajouter les égalités ci-dessous

Ce qui donne après simplification

**II-** L’affirmation est vraie !

1ère méthode (plus longue) : On obtient facilement (si on rajoute une ème droite, elle va couper chacune des droites en points supplémentaires). On a également (la ème droite va rajouter 1 arête sur chacune des droites précédentes et rajouter également arêtes sur cette nouvelle droite puisqu’elle sera délimitée par points d’intersection). On peut exprimer et en fonction de en utilisant la même méthode qu’au I. On obtient alors et . Il suffira alors de calculer qui vaudra bien 1.

2nde méthode : on appelle . On vérifie que et on justifie que pour tout entier naturel non nul , . En effet, si on rajoute une droite (ne passant par aucun point d’intersection) à droites en position générale alors on aura comme on l’a vu points supplémentaires, régions supplémentaires et on aura arêtes supplémentaires (voir explication dans la 1ère méthode) d’où

**Partie B :**

1. Si on rajoute un cercle à la figure ci-dessus de façon à ce qu’on obtienne 4 cercles en position générale, on va rajouter 2 points d’intersection à chacun de ces trois cercles. Comme chaque arc du cercle rajouté, délimité par deux points d’intersection consécutifs, va rajouter une région, le nombre de régions rajoutées sera égal au nombre de points d’intersection rajoutés donc .

On a .

1. Si on rajoute un cercle à cercles en position générale, on va rajouter 2 points d’intersection à chacun de ces cercles donc régions (autant que de points d’intersection d’après l’explication donnée à la question précédente) d’où .

Il suffit par exemple d’ajouter les égalités ci-dessous

Ce qui donne après simplification

1. Il n’existe aucun entier vérifiant , c'est-à-dire . Le discriminant est et les solutions réelles sont et .

On pouvait aussi calculer et et justifier que la suite est croissante.

1. On peut soit résoudre l’inéquation

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 |  | 0 |  |  |

D’après le tableau de signes précédent, si alors et donc . Conclusion : aucun entier est tel que le nombre de régions délimitées par cercles en position générale soit inférieur au nombre de régions délimitées par droites en position générale.

On pouvait aussi vérifier que et remarquer que pour passer d’un terme au suivant on ajoute à et on ajoute à or pour , on a bien sûr .

1. Non, en effet qui est le produit de deux entiers consécutifs donc l’un de ces facteurs sera pair et donc le produit également. Ainsi, sera toujours pair.
2. On cherche donc pour que soit divisible par 6. Comme on a vu dans la question précédente que est un multiple de 2, cela revient à demander à ce que soit divisible par 3.

* Si est un multiple de 3, c'est-à-dire si avec un entier, alors

qui n’est pas un multiple de 3.

* Si est le successeur d’un multiple de 3, c'est-à-dire si avec un entier, alors

qui n’est pas un multiple de 3.

* Enfin, il reste le cas où est prédécesseur d’un multiple de 3, c'est-à-dire si avec un entier, alors

Conclusion : aucun entier n’est tel que soit divisible par 6 (car n’est jamais divisible par 3).

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats n’ayant pas suivi l’enseignement de spécialité de mathématiques)

**Partie A :**

1. Un seul quartier latin est possible avec les cellules déjà connues.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 10 | 20 | 30 | 40 |
| 20 | 40 | 10 | 30 |
| 40 | 30 | 20 | 10 |
| 30 | 10 | 40 | 20 |

1. En permutant des colonnes sur le plan d'un quartier latin :

- chaque colonne conserve un immeuble et un seul de chaque taille : toute colonne du nouveau quartier est une colonne de l'ancien quartier latin.

- chaque ligne conserve également un immeuble et un seul de chaque taille : toute ligne du nouveau quartier est obtenue à partir de la même ligne de l'ancien quartier latin dans laquelle on a simplement permuté les immeubles.

Par permutation de colonnes, un quartier latin reste donc un quartier latin.

1. En appliquant deux permutations de colonnes différentes à un même quartier latin, les deux quartiers latins obtenus sont différents. En effet, si les deux quartiers obtenus étaient identiques, les deux permutations de colonnes déplaceraient de façon identique chacune des 4 colonnes initiales, ce qui décrit deux permutations identiques.

On peut donc obtenir, en permutant des colonnes d'un quartier latin initial, autant de quartiers latins différents qu'il existe de permutations différentes des quatre colonnes.

On désigne par (a b c d) une permutation de colonnes : la 1ère colonne en partant de la gauche devient la a\_ième colonne, la 2nde devient la b\_ième colonne et ainsi de suite.

Il existe donc autant de permutations de colonnes que de quadruplets ordonnés des quatre entiers 1, 2, 3 et 4.

On en dénombre donc 4 × 3 × 2 × 1, soit 24. Le nombre de quartiers latins que l'on peut obtenir à partir d'un quartier latin initial est donc 24.

1. On considère un quartier latin initial.

On nomme a la colonne débutant de haut en bas par 10 (respectivement b par 20, c par 30 et d par 40).

La permutation inverse de (a b c d) envoie la colonne a sur la première colonne et ainsi de suite.

On obtient donc un quartier latin débutant par une ligne du haut 10 / 20 / 30 / 40.

On procède de même avec les lignes (avec une lecture de gauche à droite).

La permutation inverse de (1 b c d) laisse la première ligne stable et permet d'obtenir un quartier latin du type

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 10 | 20 | 30 | 40 |
| 20 |  |  |  |
| 30 |  |  |  |
| 40 |  |  |  |

1. Il existe quatre quartiers latins du type précédent (en raisonnant de façon exhaustive sur une des cellules à remplir).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 | 20 | 30 | 40 |  | 10 | 20 | 30 | 40 |  | 10 | 20 | 30 | 40 |  | 10 | 20 | 30 | 40 |
| 20 | 10 | 40 | 30 |  | 20 | 10 | 40 | 30 |  | 20 | 30 | 40 | 10 |  | 20 | 40 | 10 | 30 |
| 30 | 40 | 10 | 20 |  | 30 | 40 | 20 | 10 |  | 30 | 40 | 10 | 20 |  | 30 | 10 | 40 | 20 |
| 40 | 30 | 20 | 10 |  | 40 | 30 | 10 | 20 |  | 40 | 10 | 20 | 30 |  | 40 | 30 | 20 | 10 |

Tout quartier latin peut être ramené à l'un des quatre quartiers latins "normalisés" ci-dessus et à un seul car la seule composition de permutation sur les colonnes puis sur les lignes qui permet de le faire est entièrement déterminée par les bords initiaux. L'ensemble des quartiers latins est donc composé de quatre classes disjointes, dont chacune contient exactement un des quatre carrés latins normalisés ci-dessus.

De plus, il y a autant de quartiers latins dans chaque classe que de permutations de colonnes fois le nombre de permutations de lignes conservant la première ligne.

Le nombre de plans de quartiers latins est donc donné par le produit :

Nombre de classes avec un quartier latin normalisé × Nombre de permutations de lignes laissant la première invariante × Nombre de permutations de colonnes = 4 × 6 × 24 = 576.

**Partie B**

1. Quartier latin dont le tour latin est donné.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 2 | 1 |  |
| 3 | 20 | 10 | 30 | 40 | 1 |
| 1 | 40 | 30 | 20 | 10 | 4 |
| 3 | 10 | 20 | 40 | 30 | 2 |
| 2 | 30 | 40 | 10 | 20 | 2 |
|  | 2 | 1 | 2 | 3 |  |

1. Tout quartier latin présente sur chaque ligne et colonne (et donc sur chaque bord du quartier latin en particulier) un unique immeuble de 40 étages. Depuis le bord de cette ligne ou colonne où l'on fait face à un immeuble de 40, on ne peut voir que lui. Comme tout immeuble "intérieur" de 40 étages est visible, les autres chiffres du tour latin sur chaque bord sont au moins égaux à 2.

Enfin, si le nombre 1 figure en bout de ligne ou de colonne, on distingue donc au moins l'immeuble de 30 étages et l'immeuble de 40 étages depuis le bord opposé. Deux 1 ne peuvent donc se faire face.

1. Supposons que sur un tour latin tous les chiffres de 1 à 4 apparaissent une fois exactement sur chaque bord.

Sur la ligne du haut, le 4 peut se trouver dans un coin ou non…

On examine ces deux situations (sans perte de généralité en se plaçant en haut à gauche).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 |  |  |  |  |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  | 4 |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 10 |  |  |  |  |  | 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 |  | 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 20 |  |  |  |  | 🢩 |  | 20 |  |  |  |  | 🢩 |  | 20 |  |  | 30 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 30 |  |  |  |  |  |  | 30 |  |  |  |  |  |  | 30 |  |  | 20 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 40 |  |  |  |  |  | 1 | 40 | 30 | 20 | 10 | 4 |  | 1 | 40 | 30 | 20 | 10 | 4 |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Nécessairement le 1 sur le bord bas est en face du 4 puisque l'immeuble de 40 étages est placé. | | | | | |  | Nécessairement une ligne débutant par 10 est celle où l'on voit les 4 immeubles. | | | | | |  | Les colonnes centrales ne permettent de voir que 2 immeubles… Le 3 ne peut pas apparaître sur le tour. | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 4 |  |  |  |  |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  | 4 |  |  |  |  |  |  | 4 | 1 |  |  |
|  |  | 10 |  |  |  |  |  |  | 10 |  |  |  |  |  |  | 10 |  |  |  |  | 2 |  | 10 | 40 |  |  |
|  |  | 20 |  |  |  | 🢩 | 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 | 🢩 | 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 | 🢩 | 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 |
|  |  | 30 |  |  |  |  |  |  | 30 |  |  |  |  |  |  | 30 |  |  |  |  | 1 | 40 | 30 | 20 | 10 | 4 |
|  |  | 40 |  |  |  |  | 2 |  | 40 |  |  |  |  | 2 |  | 40 |  |  |  |  | 2 |  | 40 | 10 |  |  |
|  |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 | 4 |  |  |
| Nécessairement le 1 sur le bord bas est en face du 4 puisque l'immeuble de 40 étages est placé. | | | | | |  | Nécessairement seule la seconde ligne permet de faire apparaître 4 et 1 sur les bords opposés gauche et droit. | | | | | |  | On agit de même sur les 3ème colonne et 3ème ligne où seuls les immeubles de 30 étages permettent de faire apparaître 4 et 1 sur les bords. | | | | | |  | On obtient nécessairement deux fois le 2 sur le bord gauche et le 3 ne peut y apparaître. | | | | | |

La supposition faite est absurde. On en déduit que sur un tour latin tous les chiffres de 1 à 4 ne peuvent apparaître une fois exactement sur chaque bord.

1. Sur un tour latin il est possible qu'un chiffre n'apparaisse pas du tout.   
   Ce n'est pas le cas du 1 (à cause d'un immeuble de 40 étages sur un bord) ni du 2 (à cause de l'immeuble de 40 étages sur la 2ème ligne par exemple qui impose un 2 sur le bord haut de la colonne correspondante).

Mais il est possible d'écarter le 3 ou le 4 comme le montre les deux quartiers latins ci-dessous

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 2 | 4 |  |  |  | 1 | 3 | 2 | 2 |  |
| 1 | 40 | 30 | 20 | 10 | 4 |  | 1 | 40 | 10 | 30 | 20 | 3 |
| 2 | 30 | 10 | 40 | 20 | 2 |  | 2 | 30 | 20 | 10 | 40 | 1 |
| 2 | 20 | 40 | 10 | 30 | 2 |  | 2 | 10 | 40 | 20 | 30 | 2 |
| 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 1 |  | 3 | 20 | 30 | 40 | 10 | 2 |
|  | 4 | 2 | 2 | 1 |  |  |  | 3 | 2 | 1 | 3 |  |