ACADÉMIE
DE MONTPELLIER
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2022

Mercredi 9 mars 2022

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Deuxième partie : Exercices académiques

Pour cette partie, la recherche se fait en équipes. Une seule copie est rendue par équipe.
Les candidats traitent **deux exercices :**

Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques traitent les exercices numéro 1 (*points baladeurs*) et numéro 2 (*nombres puissants*).

Les autres candidats traitent les exercices numéro 1 (*points baladeurs*) et numéro 3 (*l'art de répéter*).

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)
Points baladeurs

Préambule :

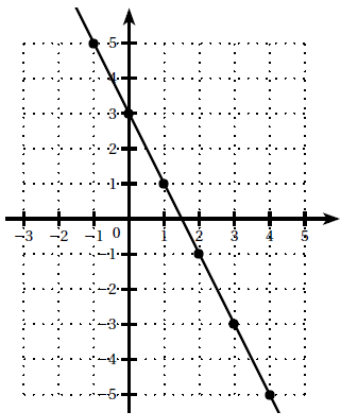
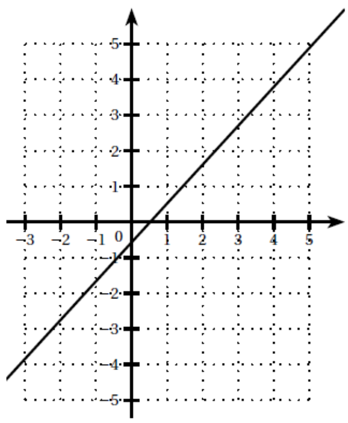
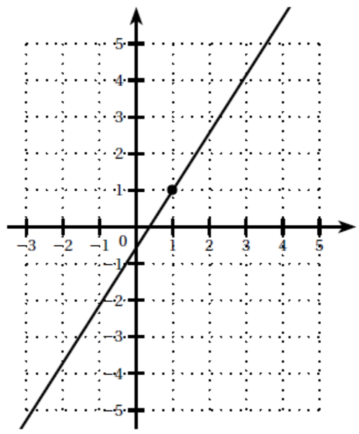
On rappelle qu'un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de 10. Autrement dit, un nombre a est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $a = \frac{b}{10^k}$, où b est un entier relatif et k un entier naturel.

Dans un repère orthonormé, on dit qu'un point est :

- **entier** si ses deux coordonnées sont des nombres entiers relatifs ;
- **décimal** si ses deux coordonnées sont des nombres décimaux.

Partie I : Points entiers et points décimaux sur une droite

On considère les exemples suivants :

Équation de droite	$y = -2x + 3$	$y = \frac{12}{11}x - \frac{4}{7}$	$y = \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi}{2}$
Représentation graphique			
Nombre de point(s) entier(s) sur la droite	une infinité	aucun	un seul

1. Recopier et compléter, sans justifier, le tableau suivant avec les réponses « aucun », « un seul » ou « une infinité » :

Équation de droite	$y = 5x + 7$	$x = \frac{1}{2}$	$y = x\sqrt{2} + \frac{1}{2}$	$18 = 0{,}75x + 0{,}25y$	$y - \pi x = 0$
Nombres de points entiers sur la droite					
Nombre de points décimaux sur la droite					

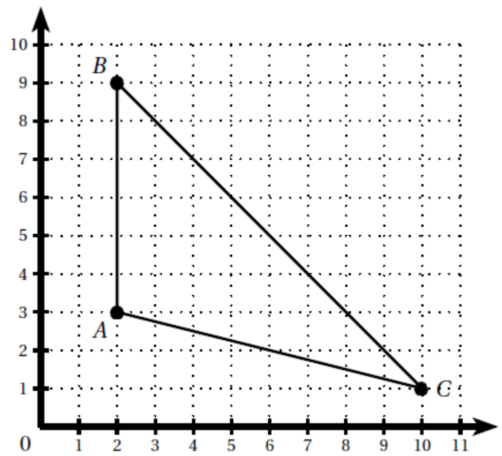
2. Donner, sans justifier, l'équation réduite d'une droite, autre que celles citées dans la question précédente, qui ne contient aucun point décimal.
3. On considère une droite D qui possède deux points entiers distincts. Justifier que D contient une infinité de points entiers.
   Que peut-on en conclure ?

Partie II : Points sur un segment

1. Le but de cette question est de déterminer le nombre de points entiers que contient un segment dont les extrémités sont des points entiers.
   - **a.** On considère les points $I(0\,;0)$ et $J(12\,;18)$. Donner, sans justification, le nombre de points entiers appartenant au segment $[IJ]$.
   - **b.** On considère les points $M(1\,;2)$ et $N(2021\,;2022)$. Donner, sans justification, le nombre de points entiers appartenant au segment $[MN]$.
   - **c.** On considère les points $P(5\,;7)$ et $Q(369\,;267)$. Donner, sans justification, le nombre de points entiers appartenant au segment $[PQ]$.
   - **d.** Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points entiers distincts du plan. Déterminer le nombre de points entiers que contient le segment $[AB]$.
2. Montrer que si un segment contient deux points décimaux distincts, alors il en contient une infinité.

Partie III : Points contenus dans un ensemble

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(2\,;3)$, $B(2\,;9)$ et $C(10\,;1)$.
   On dit qu'**un point est *dans* le triangle ABC** s'il est à l'intérieur de ce triangle ou s'il appartient à l'un des côtés de ce triangle.



   - **a.** Déterminer graphiquement le nombre de points entiers se trouvant *dans* le triangle ABC.
   - **b.** Déterminer les équations réduites des droites (AB), (BC) et (AC).
   - **c.** Expliquer pourquoi chercher les points situés *dans* le triangle ABC revient à résoudre le système d'inéquations suivant :

$$S : \begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq -x + 11 \\ y \geq -0{,}25x + 3{,}5 \end{cases}$$

   - **d.** Expliquer pourquoi si un couple $(x\,;y)$ vérifie le système d'inéquations S alors
$$2 \leq x \leq 10.$$
   - **e.** Proposer alors un algorithme qui permet de déterminer le nombre de points entiers se trouvant *dans* le triangle ABC.

2. Déterminer par la méthode votre choix, en expliquant votre démarche, le nombre de points entiers de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 0{,}75x + 0{,}25y < 20 \\ 0{,}75x + 0{,}25y \geq 18 \\ 0{,}5x + 0{,}5y < 23 \\ 0{,}5x + 0{,}5y \geq 21 \end{cases}$$

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques)

Nombres puissants

On rappelle le ***théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers*** :

Théorème 1 : *Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, où p_1, p_2, ..., p_k sont des nombres premiers et α_1, α_2, ..., α_k des entiers naturels non nuls.*

Nous rappelons également le théorème ci-dessous qui peut être utilisé pour démontrer certains résultats :

Théorème 2 : *Si un nombre premier divise un produit, alors il divise l'un des facteurs de ce produit.*

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des « **nombres puissants** », dont la définition est donnée ci-dessous :

Définition : *Un entier naturel n est dit puissant s'il est supérieur ou égal à 2 et si, pour tout diviseur premier p de n, le nombre p^2 divise également n.*

1. Étude de quelques exemples

- **a.** Démontrer que les nombres 16 et 72 sont des nombres puissants, et que 18 n'est pas un nombre puissant.
- **b.** Les nombres 144, 200 et 2 022 sont-ils des nombres puissants ?
- **c.** Donner tous les nombres puissants inférieurs ou égaux à 10.
- **d.** Un nombre premier peut-il être puissant ?
- **e.** Comment reconnaître un nombre puissant en connaissant sa décomposition en facteurs premiers ? (Voir théorème 1 ci-dessus)

2. Nombres puissants consécutifs

En 1936, au congrès international des mathématiciens à Oslo, Paul Erdös a demandé à Karl Mahler s'il existait une infinité de couples de nombres puissants consécutifs.

- **a.** Donner un couple de nombres puissants consécutifs.
- **b.** Montrer que si n et $n+1$ sont des nombres puissants alors $4n(n+1)$ et $4n(n+1)+1$ sont des nombres puissants.
- **c.** Répondre à la question posée par Paul Erdös à Karl Mahler.
- **d.** Déterminer un couple de nombres puissants consécutifs supérieurs ou égaux à 2 022.

3. Condition nécessaire et suffisante

- **a.** On admet que pour tout entier naturel α supérieur ou égal à 2, il existe deux entiers naturels u et v tels que $\alpha = 2u + 3v$.

En déduire que si n est un nombre puissant alors il existe des entiers naturels a et b tels que $n = a^2b^3$.

b. Démontrer que si a et b sont des entiers naturels alors a^2b^3 est un nombre puissant.

c. Déterminer le nombre de nombres puissants inférieurs ou égaux à 2 022.

4. Nombres d'Achille

Un ***nombre d'Achille*** est un nombre puissant qui n'est pas une puissance parfaite c'est-à-dire une puissance d'un entier. Ce nom a été donné en référence au héros mythologique Achille qui est puissant mais pas parfait à cause de son talon.

Par exemple :

$108 = 2^2 \times 3^3$ *est un nombre d'Achille ;*

$216 = 6^3$ *est un nombre puissant mais n'est pas un nombre d'Achille.*

a. Montrer que les nombres d'Achille sont les nombres de la forme $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, avec p_1, p_2, ..., p_k premiers distincts, tels que :

- $k \geq 2$
- α_1, α_2, ..., α_k sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 ;
- le seul diviseur positif commun à α_1, α_2, ..., α_k est 1.

b. Démontrer que dans la décomposition en facteurs premiers d'un nombre d'Achille inférieur ou égal à 2 022, le plus grand facteur est inférieur ou égal à 13.

c. Recenser les nombres d'Achille inférieurs ou égaux à 2 022.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques de voie générale)

L'art de répéter

Partie 1 : répéter des décimales

On rappelle que :

- tout nombre décimal admet un **développement décimal fini,** écrit à l'aide de puissances de dix.
  Par exemple : $38,534 = 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$.
- tout nombre rationnel non décimal admet un **développement décimal illimité et périodique**.
  Par exemple $\frac{9}{7} \approx 1,285714\ 285714\ 285714 \ldots$ La séquence de six chiffres 285714 se répète indéfiniment, ce qu'on note : $\frac{9}{7} = 1,\underline{285714}$.

1. Écrire le développement décimal illimité périodique des nombres $\frac{37}{11}$ et $\frac{5}{13}$.
2. On cherche l'écriture fractionnaire du nombre rationnel x dont le développement décimal illimité périodique est $17,\underline{39}$.
   a. Écrire le développement décimal illimité périodique du nombre $100x$.
   b. Calculer $100x - x$ puis conclure.

Partie 2 : répéter des traits de fraction

Le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ admet un développement décimal illimité qui n'est pas périodique ; et pourtant...

Les fractions continues sont des expressions du type $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}}$ telles que :

- le nombre de traits de fraction peut être fini ou infini,
- les numérateurs sont égaux à 1,
- a_1 est un entier naturel et tous les autres a_i sont des entiers strictement positifs.

On utilise la notation $[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$ correspondant au nombre $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}}$ pour en faciliter l'écriture.

Par exemple : $[2,5,3,4] = \mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{5} + \frac{1}{\mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{4}}}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{4}{13}} = 2 + \frac{1}{\frac{69}{13}} = 2 + \frac{13}{69} = \frac{151}{69}$.

1. Calculer sous forme d'une fraction les fractions continues $[0,3,6]$ et $[1,3,2,2,4]$.
2. Nous admettrons que tout nombre rationnel admet une écriture sous la forme d'une fraction continue et que cette écriture est limitée, c'est-à-dire avec un nombre fini de traits de fraction.
   Par exemple :
   $$\frac{162}{47} = 3 + \frac{21}{47} = 3 + \frac{1}{\frac{47}{21}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{5}{21}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{21}{5}}} = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{4} + \frac{1}{\mathbf{5}}}} = [\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{5}].$$

a. Écrire les nombres rationnels $\frac{22}{7}$ et $\frac{19}{12}$ sous la forme de fractions continues.

b. Montrer que si un nombre réel admet deux écritures sous la forme $[a_1, a_2]$ et $[b_1, b_2]$ alors $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$.

c. Le programme ci-contre, écrit en langage Python, renvoie une liste L d'entiers décrivant le développement en fraction continue d'un nombre rationnel $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ (où a est un entier naturel et b un entier naturel non nul).

Recopier et compléter ce programme.

(On rappelle que les instructions u//v et u%v désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier u par un entier v.)

```
def fractionContinue(a,b):
    L=[]
    while b!=...:
        q=a//b
        r=a%b
        L.append(...)
        if r==...:
            return L
        else :
            a=...
            b=...
    L.append(a)
    return L
```

3. Par analogie, on peut calculer la fraction continue d'un nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$$

On peut donc écrire $\sqrt{2} = [1,2,2,\ldots]$

On peut montrer que l'écriture de $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction continue est illimitée et périodique.

On note cette écriture $[1, \overline{2}]$ pour signifier la répétition du chiffre 2.

a. Vérifier que l'écriture en fraction continue de $\sqrt{5}$ est aussi illimitée. Donner cette écriture.

b. On considère le nombre réel $x = [1, \overline{1,2}] = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots}}}}$.

On a alors $x = 1 + \frac{1}{y}$, où y vérifie la relation $y = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{y}}$.

En exprimant y en fonction de x, vérifier que x est solution d'une équation du type $x^2 = k$, où k est un entier à préciser. Donner alors la valeur exacte de x.

4. Les nombres de métal

a. Le réel $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or.
Vérifier que le nombre Φ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. En déduire que l'écriture en fraction continue du nombre d'or est $[\overline{1}]$; on dit que cette écriture est **purement** périodique.

b. Le nombre d'argent est le réel dont l'écriture en fraction continue est purement périodique et égale à $[\overline{2}]$.
Donner une écriture du nombre d'argent de la forme $p + \sqrt{q}$ où p et q sont entiers.

c. Le nombre de bronze est le réel dont l'écriture en fraction continue est purement périodique et égale à $[\overline{3}]$. En donner une écriture de la forme $\frac{r+\sqrt{s}}{t}$ où r, s et t sont entiers.

d. Soit n un entier naturel non nul, montrer que $[\overline{n}]$ est la solution positive d'une équation du second degré que l'on précisera.
En déduire une expression en fonction de n du nombre $[\overline{n}]$ de la forme $\frac{u+\sqrt{v}}{w}$ où u, v et w sont entiers. On appelle ces nombres des ***nombres de métal***.