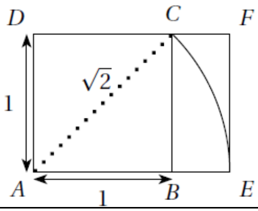
Olympiades de mathématiques 2023

Corrigé et barème

Exercice 1 : rectangles et formats **15 points**

Qu.	Eléments de correction
I.1	On sait que la longueur est de 85 mm, soit $L = 85$. De plus, $r = \frac{85}{n} \Leftrightarrow \frac{17}{11}\ \frac{85}{l} \Leftrightarrow l = 55$. La largeur des nouvelles pièces d'identité est de 55 mm.
I.2	Soit L la longueur de l'écran et l sa largeur. • $r = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{L}{l}\ \frac{16}{9} \Leftrightarrow L = \frac{16}{9} l$ • De plus, $L^2 + l^2 = 43^2 \Leftrightarrow \left(\frac{16}{9} l\right)^2 + l^2 = 1849 \Leftrightarrow \frac{337}{81} l^2 = 1849 \Leftrightarrow l^2 = \frac{149769}{337}$ Comme l est une longueur, donc positive, $l = \sqrt{\frac{149769}{337}} = \frac{387}{\sqrt{337}}$ • On En déduit que $L = \frac{16}{9} \times \frac{387}{\sqrt{337}}\ \frac{688}{\sqrt{337}}$ La longueur d'un écran de 43 pouces est de $\frac{688}{\sqrt{337}}$ pouces, soit $\frac{688}{\sqrt{337}} \times 2{,}54 \approx 95{,}19$ cm et sa largeur est de $\frac{387}{\sqrt{337}} \times 2{,}54 \approx 53{,}55$ cm.
II.1	 Le triangle ABC est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$. On en déduit que $AE = \sqrt{2}$. Le rapport du rectangle $AEFD$ est donc $r = \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$
II.2	Comme le rectangle initial est un rectangle de rapport $\sqrt{2}$, on en déduit que $l = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Les nouveaux rectangles ont pour longueur $\frac{L}{\sqrt{2}} \geq \frac{L}{2}$ et largeur $\frac{L}{2}$. Leur rapport est donc $\frac{\frac{L}{\sqrt{2}}}{\frac{L}{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{L} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ Ces deux rectangles sont donc des rectangles de rapport $\sqrt{2}$.
III.1	A chaque étape, on découpe un rectangle de forme A_k en deux, l'aire du format A_{k+1} est donc divisée par 2, on en déduit que pour tout entier $k \geq 0$, l'aire du format A_k est donc égale à $\frac{1}{2^k}$.
III.2	collage
III.3	On constate que toutes les feuilles de format A_k, pour $k > 0$, peuvent être disposées à l'intérieur d'une feuille de format A_0. Lorsque k devient de plus en plus grand, la partie non recouverte de la feuille de format A_0 devient de plus en plus petite et sa surface va se rapprocher de 0. On en déduit que la somme des aires de toutes les feuilles A_k se rapproche de deux fois l'aire de la feuille de format A_0, soit $2m^2$.
IV.1	On considère le rectangle de format A_0 de surface $L_0 \times l_0 = 1\ m^2$ et de rapport $\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$. Déterminons L_0 et l_0. Il faut résoudre $\begin{cases} l_0 L_0 = 1 \\ \frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_0^2 = \sqrt{2} \\ l_0 = \frac{L_0}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_0 = \sqrt{\sqrt{2}} \\ l_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$ car l_0 et L_0 sont des longueurs. On en déduit que $L_0 \approx 1{,}149m = 1149mm$ et $l_0 \approx 0{,}841m = 841mm$.
IV.2	$L_k = \frac{L_0}{\sqrt{2}^k}$ et $l_k = \frac{L_0}{2\sqrt{2}^{k-1}}\ \frac{L_0}{\sqrt{2}^{k+1}}$. Le périmètre d'une feuille de format A_k est donc $2(L_k + l_k) = \frac{2L_0}{\sqrt{2}^k} + \frac{2L_0}{\sqrt{2}^{k+1}} = \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^{k+1}} = \frac{2378(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^{k+1}}$

IV.3	Il faut résoudre $\frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^{k+1}} < 1$.
	A l'aide de la calculatrice (ou d'un programme Python), on trouve $n = 24$. Le format d'une feuille de format A_{24} est le premier format à avoir un périmètre strictement inférieur à 1mm.
	Programme Python :
	def perimetre(L):
	$l = 1000\,000/L$
	$p = 2 * L + 2000 * l$
	$n = 0$
	
	def perimetre(L):
	$p = 2 * L + 200000/L$
	$k = 0$
	while $p > 1$:

		while $p > 1$: $\quad c = L/2$ $\quad L = l$ $\quad l = c$ $\quad p = 2 * L + 2 * l$ $\quad n = n + 1$ return(n) $\quad k = k + 1$ $\quad p = 2 * L * \left(\sqrt{(2)} + 1\right) / \left(\sqrt{(2)} * (k + 1)\right)$ return(k)
IV.4		On peut commencer par conjecturer cette somme à l’aide d’un programme : def somme(L, n) : $\quad l = 1000000/L$ $\quad p = 2 * L + 2 * l$ $\quad$for $k$in range($1, n$): $\quad\quad c = L/2$ $\quad\quad L = l$ $\quad\quad l = c$ $\quad\quad p = p + 2 * L + 2 * l$ $\quad$return(p) somme(1189, 100 000) = 13862. **Preuve :** Notons p_k le périmètre d’une feuille de format A_k et a_k son aire. Remarquons que pour tout entier naturel k $p_{2k+1} = \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^{2k+2}} \ \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{2^{k+1}} \ \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{2\times 2^k} \ L_0(\sqrt{2}+1)a_k$ La somme de tous les périmètres des feuilles de format A_{2k+1} se rapproche de la valeur $L_0(\sqrt{2}+1) \times 2 = 2L_0(\sqrt{2}+1)$. $p_{2k} = \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^{2k+1}} \ \frac{2L_0(\sqrt{2}+1)}{2^k\sqrt{2}} \ \frac{\sqrt{2}L_0(\sqrt{2}+1)}{2^k} \ \sqrt{2}L_0(\sqrt{2}+1)a_k$ La somme de tous les périmètres des feuilles de format A_{2k} se rapproche de la valeur $\sqrt{2}L_0(\sqrt{2}+1) \times 2 = 2\sqrt{2}L_0(\sqrt{2}+1)$. La somme de tous les périmètres des feuilles de format A(k) se rapproche de la valeur : $2L_0(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2}L_0(\sqrt{2}+1) = 2L_0(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}) = 2L_0(\sqrt{2}+1)^2$ $2\sqrt{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1) \approx 13862mm$ (ou $13860mm$ si on prend $L_0 = 1189mm$.

Exercice 2 (pour les EDS) : rendez la monnaie ! **15 points**

Qu.	Eléments de correction
I.1	Avec le porte-monnaie $(1,2,5)$, on ne peut pas payer de somme égale à 4 puisque les seules pièces de valeurs inférieures ou égales à 4 sont les pièces de valeurs 1 et 2 or leur somme ne fait que 3, strictement inférieure à 4.
I.2a	$C(1,3,4) = 1$ puisqu’on peut payer une somme égale à 1 (avec la pièce de valeur 1) mais pas 2 (la seule pièce de valeur inférieure ou égale à 2 est celle de valeur 1).
I.2.b	$C(1,2,4) = 7$ puisqu’on peut payer une somme égale à 1 (avec la pièce de valeur 1), égale à 2 (avec la pièce de valeur 2), égale à 3 (avec les pièces de valeurs 1 et 2), égale à 4 (avec la pièce de valeur 4), égale à 5 (avec les pièces de valeurs 1 et 4), égale à 6 (avec les pièces de valeurs 2 et 4), égale à 7 (avec les pièces de valeurs 1,2 et 4), mais on ne peut pas payer de somme égale 8 puisque la somme totale des valeurs des pièces est égale à 7, strictement inférieure à 8.
I.2c	$C(1,2,2,5,12) = 10$ et $C(1,2,4,8,16) = 31$.
I.3	Si toutes les pièces avaient des valeurs supérieures ou égales à 2, on ne pourrait même pas payer une somme égale à 1 or la définition d’une capacité M suggère que celle-ci doit être supérieure ou égal à 1. Réciproquement, si une des valeurs est 1, on pourrait payer une somme égale à 1 donc dans ce cas, et ce cas uniquement, la capacité existe bien.
I.4	Pour cela, cherchons toutes les valeurs possibles de $C(1,a,b)$ avec $1 \leq a \leq b$. Si $a = 1$ alors $C(1,1,b) = \begin{cases} 3 \text{ si } b = 1 \\ 4 \text{ si } b = 2 \\ 5 \text{ si } b = 3 \\ 2 \text{ si } b \geq 4 \end{cases}$; si $a = 2$ alors $C(1,2,b) = \begin{cases} 5 \text{ si } b = 2 \\ 6 \text{ si } b = 3 \\ 7 \text{ si } b = 4 \\ 3 \text{ si } b \geq 5 \end{cases}$ et si $a \geq 3$ alors $C(1,a,b) = 1$.

	Conclusion : la capacité maximale est 7 atteinte pour $(a,b)=(2,4)$.
I.5a	Si $a_{j+1} > M+1$ alors $M' = M$. En effet, $M = C(a_1, \ldots, a_j)$ montre qu'on ne peut pas payer la valeur $M+1$ avec le porte-monnaie $(a_1, \ldots, a_j)$ et si $a_{j+1} > M+1$, on ne pourra pas non plus utiliser la pièce de valeur a_{j+1}.
I.5b	Si $a_{j+1} \leq M+1$, toutes les sommes de 1 à M sont obtenues avec le porte-monnaie $(a_1, \ldots, a_j)$, et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq a_{j+1}$, on a : $$M+k = (M+k-a_{j+1}) + a_{j+1}$$ En ajoutant $M - a_{j+1}$ à l'encadrement $1 \leq k \leq a_{j+1}$, on obtient : $$M+1-a_{j+1} \leq M+k-a_{j+1} \leq M$$ Comme $a_{j+1} \leq M+1$, on a $M+1-a_{j+1} \geq 0$ donc $$0 \leq M+k-a_{j+1} \leq M$$ On peut donc payer $M+k$ avec la pièce de a_{j+1} et compléter (si besoin) en payant $M+k-a_{j+1}$ avec le porte-monnaie $(a_1, \ldots, a_j)$. Ainsi, on peut payer toutes les sommes de 1 à $M + a_{j+1}$ ce qui prouve que $M' \geq M + a_{j+1}$. D'autre part, avec le porte-monnaie $(a_1, \ldots, a_{j+1})$ on ne peut pas payer$M + a_{j+1} + 1$ car dans le cas contraire, on aurait pu payer $M+1$ avec le porte-monnaie $(a_1, \ldots, a_j)$ donc $M' = M + a_{j+1}$.

I.5.c	D'après les deux questions précédentes, on a une relation de récurrence entre les capacités $C(a_1, \ldots, a_{j+1})$ et $C(a_1, \ldots, a_j)$. Il suffit de connaitre la capacité lorsque $j=1$ or $C(a_1) = C(1) = 1$ d'où l'algorithme :
	`M←1`
	`Pour j allant de 1 à n-1 faire`
	`    Si aj<=M+1 alors`
	`        M←M+aj+1`
	La valeur de M obtenue à la fin de cet algorithme est alors la capacité $M = C(a_1, \ldots, a_n)$.

I.6	Montrons que la capacité maximale à 5 pièces est 31, obtenue pour le porte-monnaie $(1,2,4,8,16)$. - D'après la question 4, la capacité maximale à 3 pièces est 7, obtenue avec le porte-monnaie $(1,2,4)$ ce qui signifie que pour tout porte-monnaie (a_1,a_2,a_3), on a : $C(a_1,a_2,a_3) \leq 7$. - D'autre part, d'après la question 5d, $C(1,2,4,8) = 15$. Montrons que la capacité maximale à 4 pièces est 15. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout porte-monnaie (a_1,a_2,a_3,a_4), on a : $C(a_1,a_2,a_3,a_4) \leq 15$. D'après la relation de récurrence obtenue à la question 5c, il suffit de distinguer deux cas : • Si $a_4 \leq C(a_1,a_2,a_3)+1$ alors $$C(a_1,a_2,a_3,a_4) = C(a_1,a_2,a_3) + a_4 \leq 2C(a_1,a_2,a_3) + 1 \leq 2 \times 7 + 1 \leq 15$$ • Si $a_4 > C(a_1,a_2,a_3)+1$ alors $$C(a_1,a_2,a_3,a_4) = C(a_1,a_2,a_3) \leq 7$$ Dans tous les cas, on a bien $C(a_1,a_2,a_3,a_4) \leq 15$, c'est-à-dire $C(a_1,a_2,a_3,a_4) \leq C(1,2,4,8)$, prouvant que la capacité maximale à 4 pièces est 15. - Montrons maintenant que pour tout porte-monnaie (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), on a : $C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \leq 31$. D'après la relation de récurrence obtenue à la question 5c, il suffit de distinguer deux cas : • Si $a_5 \leq C(a_1,a_2,a_3,a_4)+1$ alors $$C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = C(a_1,a_2,a_3,a_4) + a_5 \leq 2C(a_1,a_2,a_3,a_4) + 1 \leq 2 \times 15 + 1 \leq 31$$ • Si $a_5 > C(a_1,a_2,a_3,a_4)+1$ alors $$C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) = C(a_1,a_2,a_3,a_4) \leq 15$$ Dans tous les cas, on a bien $C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \leq 31$, c'est-à-dire $C(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \leq C(1,2,4,8,16)$, prouvant que la capacité maximale à 5 pièces est 31.
I.7	La capacité maximale à n pièces est égale à $2^n - 1$ et obtenue avec le porte-monnaie : $$(a_1, \ldots, a_n) = (1,2,2^2 \ldots, 2^{n-1})$$ Voici ci-dessous une démonstration par récurrence qui n'était pas demandée au concours. Pour cela, montrons d'abord que pour tout entier $n \geq 1$: $C(1,2,2^2 \ldots, 2^{n-1}) = 2^n - 1$: • Cette égalité est vraie pour $n=1$ puisque $C(1) = 1 = 2^1 - 1$. • Montrons que si cette égalité est vraie pour un entier $n \geq 1$ quelconque alors elle reste vraie pour l'entier suivant :

Supposons donc que $C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}) = 2^n - 1$ est vraie pour un certain entier $n \geq 1$ quelconque et montrons alors que $C(1,2,2^2 \dots, 2^n) = 2^{n+1} - 1$.

Comme $C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}) = 2^n - 1$, on a : $2^n = C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}) + 1$, et d'après la question 5b,

$$\begin{aligned} C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}, 2^n) &= C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}) + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $C(1,2,2^2 \dots, 2^{n-1}) = 2^n - 1$.

Montrons maintenant que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\text{pour tout porte-monnaie } (a_1, \dots, a_n),\ C(a_1, \dots, a_n) \leq 2^n - 1$$

- Cette égalité est vraie pour $n = 1$ puisque $C(a_1) \leq 1 = 2^1 - 1$.
- Montrons que si cette inégalité est vraie pour un entier $n \geq 1$ quelconque alors elle reste vraie pour l'entier suivant :

  Soit $n \geq 1$ un entier quelconque et supposons que, pour tout porte-monnaie $(a_1, \dots, a_n)$,
  $$C(a_1, \dots, a_n) \leq 2^n - 1$$
  Montrons alors que, pour tout porte-monnaie $(a_1, \dots, a_{n+1})$, $C(a_1, \dots, a_{n+1}) \leq 2^{n+1} - 1$

  Soit $(a_1, \dots, a_{n+1})$ un porte monnaie quelconque. Quitte à renommer les a_i, on peut supposer que $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$.

  - Si $a_{n+1} > C(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1$, alors d'après la question 5a,
  $$C(a_1, \dots, a_{n+1}) = C(a_1, \dots, a_n) \leq 2^n - 1 \leq 2^{n+1} - 1$$
  - Si $a_{n+1} \leq C(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1$, alors d'après la question 5b,
  $$C(a_1, \dots, a_{n+1}) = C(a_1, \dots, a_n) + a_{n+1} \leq 2^n - 1 + a_{n+1} \leq 2^n - 1 + a_{n+1}$$
  comme $a_{n+1} \leq C(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1 \leq 2^n - 1 + 1 = 2^n$, on obtient
  $$C(a_1, \dots, a_{n+1}) \leq 2^n - 1 + 2^n = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Dans tous les cas, on a bien $C(a_1, \dots, a_{n+1}) \leq 2^{n+1} - 1$.
- Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$et pour tout porte-monnaie $(a_1, \dots, a_n)$, $C(a_1, \dots, a_n) \leq 2^n - 1$.

L'égalité et l'inégalité montrent bien que la capacité maximale pour n pièces est $2^n - 1$ atteinte pour le porte-monnaie $(a_1, \dots, a_n) = (1,2,2^2 \dots, 2^{n-1})$.

II.1

$C\big((1,2,5),(1,2)\big) = 8$. En effet, on a déjà vu qu'il peut payer toute somme allant de 1 à 4, mais il peut également payer une somme égale à 5 (avec sa pièce de 5), égale à 6 (avec ses pièces de 1 et de 5), égale à 7 (avec ses pièces de 2 et de 5), égale à 8 (avec ses pièces de 1, 2 et 5). Par contre, il ne peut pas payer de somme égale à 9 puisque la somme des valeurs de toutes ses pièces est 8, strictement inférieur à 9.

$C\big((8,16),(1,2,4)\big) = 24$. En effet, le porte-monnaie (1,2,4) du vendeur permet de rendre toute somme entière de 1 à 7 donc l'acheteur peut donc payer avec sa pièce de 8 n'importe quelle somme entière de $8 - 7 = 1$ à $8 - 0 = 8$. De même, l'acheteur peut également payer avec sa pièce de 16 n'importe quelle somme entière de $16 - 7 = 9$ à $16 - 0 = 16$ et enfin, il peut également payer avec ses deux pièces de 8 et de 16, n'importe quelle somme entière de $24 - 7 = 17$ à $24 - 0 = 24$. Finalement, l'acheteur peut payer n'importe quelle somme entière de 1 à 24 sans bien sûr pouvoir payer plus que la somme de ses deux pièces.

II.2

Notons C_M la capacité commune et montrons que $C_M = 31(M+1)$.

D'après la question 2b, on a : $C(1,2,4,8,16) = 31$ donc, si le porte-monnaie de l'acheteur est

$$\big((M+1) \times 1, (M+1) \times 2, (M+1) \times 4, (M+1) \times 8, (M+1) \times 16\big)$$

alors l'acheteur pourra payer (sans rendu de monnaie) toute somme de la forme $(M+1) \times k$ avec k entier tel que $1 \leq k \leq 31$.

Or par définition de M, avec le vendeur peut rendre toute somme entière de 1 à M donc toute somme strictement comprise entre $(M+1)k$ et $(M+1)(k+1) = (M+1)k + M + 1$ pourra être payée par l'acheteur. En effet, une telle somme s'écrit $(M+1)k + r$ avec $1 \leq r \leq M$ et comme

$$(M+1)k + r = (M+1)(k+1) - (M+1-r) \text{ avec } 1 \leq M+1-r \leq M$$

l'acheteur pourra payer la somme de $(M+1)k + r$ (le vendeur rendra la somme de $M+1-r$ sur celle de $(M+1)(k+1)$ fournie par l'acheteur). Ainsi, $C_M \geq 31(M+1)$. Enfin, comme

$$\begin{aligned} &(M+1) + 2(M+1) + 4(M+1) + 8(M+1) + 16(M+1) \\ &= (1+2+4+8+16)(M+1) = 31(M+1) \end{aligned}$$

On en déduit que la capacité commune est bien $C_M = 31(M+1)$. Elle ne dépend donc pas des b_i mais seulement de la capacité $M = C(b_1, \dots, b_p)$.

Exercice 3 (pour les non EDS) : nombres de Niven

Qu.	Eléments de correction	barème
I.1	$2 + 6 = 8$ et 8 ne divise pas 26 donc 26 n'est pas un nombre de Niven. $1 + 0 + 0 = 1$ et 1 divise 100 donc 100 est un nombre de Niven. $2 + 0 + 0 + 1 = 3$ et 3 divise 2 001 donc 2 001 est un nombre de Niven. $2 + 0 + 2 + 3 = 7$ et 7 divise 2 023 (car $289 \times 7 = 2023$) donc 2 023 est un nombre de Niven.	1
I.2	Le plus petit entier qui n'est pas un nombre de Niven est 11.	1
I.3	10^{n-1} est un nombre de Niven à n chiffres.	1

I.4a	La fonction Liste ci-dessous renvoie le nombre de nombres de Niven strictement compris entre 100 et 150 et la liste de ces nombres
	`def Liste():`
	`    L=[]`
	`    for k in range(101,150):`
	`        if k%Somme(k)==0:`
	`            L.append(k)`
	`    return len(L),L`
		1

I.4b	Il existe 14 nombres de Niven strictement compris entre 100 et 150. Ces nombres sont : 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144.	1
II.1	Soit N un nombre de Niven et k un entier naturel. Notons S la somme des chiffres de N. Comme N est un nombre de Niven, S divise N. Il existe donc un entier q tel que $N = Sq$. Par conséquent, $N \times 10^k = Sq \times 10^k$. Or $q \times 10^k$ est un entier donc S divise $N \times 10^k$. De plus, la somme des chiffres de $N \times 10^k$ est S donc $N \times 10^k$ est un nombre de Niven. L'affirmation 1 est donc vraie.	1
II.2	7 et 8 sont des nombres de Niven mais $7 + 8 = 15$ n'est pas un nombre de Niven (car 6 ne divise pas 15) donc l'affirmation 2 est fausse.	1
II.3	7 et 2 sont des nombres de Niven mais $7 \times 2 = 14$ n'est pas un nombre de Niven (car 5 ne divise pas 14) donc l'affirmation 3 est fausse.	1
II.4	Pour tout entier naturel n, 10^n est un nombre de Niven donc il existe une infinité de nombres de Niven pairs. L'affirmation 4 est donc vraie.	1
II.5	Pour tout entier naturel n, $2\times10^n +1$ est un nombre de Niven donc il existe une infinité de nombres de Niven impairs. L'affirmation 5 est donc vraie.	1
II.6	Soit n un entier naturel composé de 9 chiffres identiques. Il existe un entier a appartenant à l'intervalle $[1 ; 9]$ tel que $n = a \times 111111111$. La somme des chiffres de n est $9a$. Or la somme des chiffres de 111 111 111 est 9 qui est divisible par 9 donc 111 111 111 est divisible par 9. Il existe donc un entier k tel que $111111111 = 9k$. Par conséquent, $n = a \times 9k = (9a)k$. On peut donc en conclure que n est divisible par la somme de ses chiffres. Ainsi, n est un nombre de Niven. L'affirmation 6 est donc vraie.	1
II.7	La somme des chiffres de 11 111 111 111 est 11. De plus, $11111111111 = 11 \times 1010101010 + 1$ donc 11 111 111 111 n'est pas divisible par 11 qui est la somme de ses chiffres. L'affirmation 7 est donc fausse.	1
II.8	Soit N un nombre de Niven composé de n chiffres avec n pair. Supposons, par l'absurde, que les n chiffres du nombre N sont impairs. Alors N est un nombre impair et la somme des n chiffres du nombre N est paire. On obtient une contradiction car un nombre impair ne peut pas être divisible par un nombre pair. L'affirmation 8 est donc vraie.	1
II.9	Les nombres premiers compris entre 10 et 99 sont 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97. Aucun de ces nombres n'est divisible par la somme de ses chiffres donc l'affirmation 9 est vraie.	1
II.10	7 est un nombre premier. De plus, 7 est divisible par 7 (qui est la somme des chiffres du nombre 7) donc 7 est un nombre premier qui est aussi un nombre de Niven. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7. Les diviseurs de p sont 1 et p. Notons n le nombre de chiffres de p et S la somme des chiffres de p. Nous avons : $1 < S \leq 9n$. 1^{er} cas : $n = 2$ D'après l'affirmation 9, p n'est pas un nombre de Niven.	1

	2e cas : $n \geq 3$. Le nombre premier p est composé de n chiffres donc $p > 10^{n-1}$. Or, d'après l'énoncé, $9n < 10^{n-1}$ donc $1 < S < p$. Ainsi, p n'est pas un nombre de Niven. L'affirmation 10 est donc vraie.	