ACADÉMIE
DE MONTPELLIER
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths ») doivent traiter les exercices académiques 1 (« *origami* ») et 2 (« *triplets* solidaires »).

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter les exercices académiques 1 (« *origami* ») et 3 (« *quel jour de la semaine était-ce ?* »).

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

<u>**Les énoncés doivent être rendus**</u> au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé académique comporte 9 pages.

Exercice 1 (pour tous les candidats)

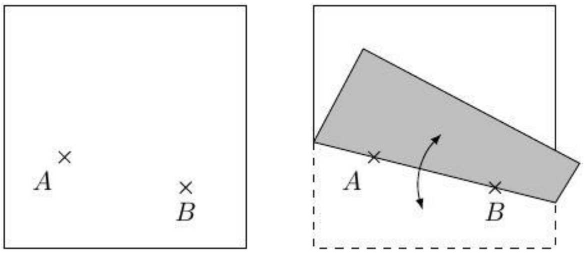
Origami

L'origami est l'art du pliage du papier. L'expression « construire par origami » signifie que les constructions s'effectueront uniquement par **pliages (ou dépliages) rectilignes successifs de la feuille** (on n'utilisera donc ni règle, ni compas).

LISTE DES PLIAGES AUTORISÉS

Dans toute la suite, la flèche signifie que l'on plie dans le sens de la flèche et la double flèche que l'on plie puis que l'on déplie. Les quatre pliages autorisés dans ce problème sont les suivants :

- **pliage 1** : plier selon deux points A et B.
  Les étapes sont les suivantes :

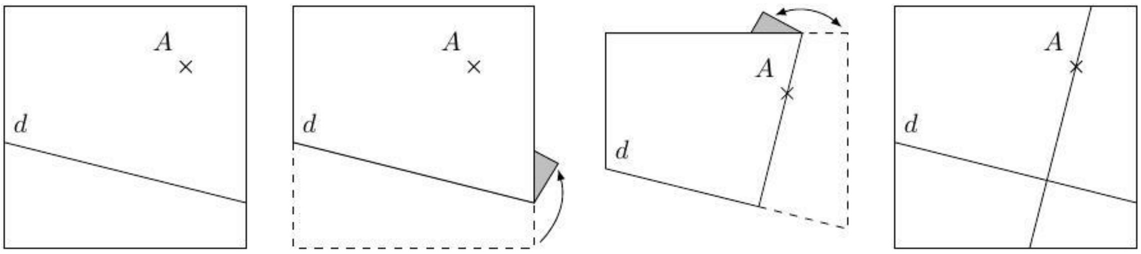


Situation de départ | On plie puis on déplie | On admet que l'on obtient la droite (AB).

Ce pliage est noté $p_1(A, B)$.

- **pliage 2** : plier une droite d sur elle-même par un pli passant par un point A.

  Les étapes sont les suivantes :

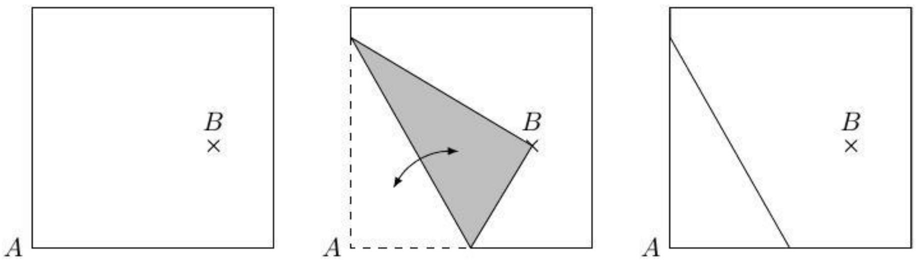


Situation de départ | On plie selon d | On replie d sur elle-même par un pli passant par A | On admet que l'on obtient la droite perpendiculaire à d passant par A.

Ce pliage est noté $p_2(A, d)$.

- **pliage 3** : plier en ramenant un coin A de la feuille sur un point B.

  Les étapes sont les suivantes :

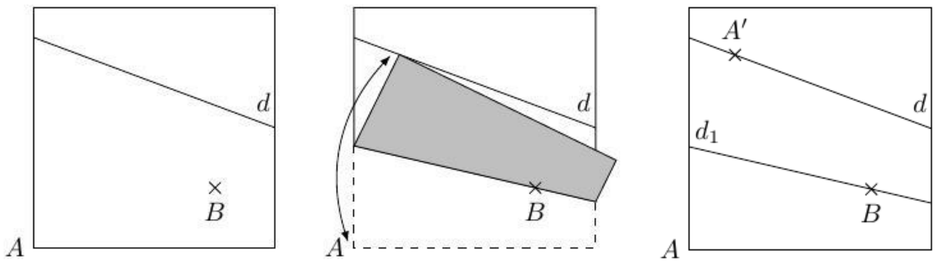


Situation de départ | On plie en ramenant A sur B | On admet que l'on obtient la médiatrice de $[AB]$.

Ce pliage est noté $p_3(A, B)$.

- **pliage 4** : plier en ramenant un coin A de la feuille sur une droite d par un pli passant par un point B.

  Les étapes sont les suivantes :



Situation de départ

On plie en ramenant A sur d par un pli passant par B

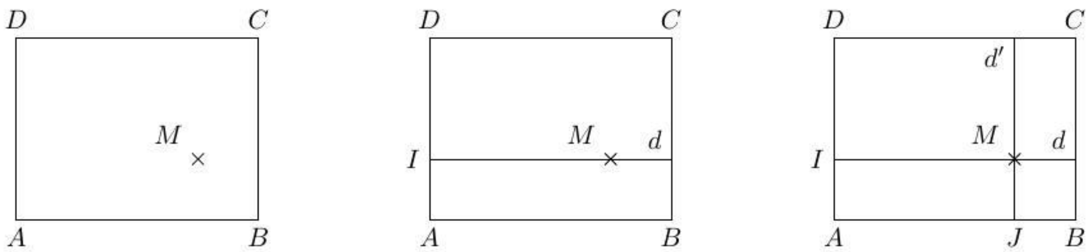
On obtient le point A', qui appartient à d, et la droite d_1.

On admet que d_1 est la médiatrice de $[AA']$ et qu'elle passe par B.

Ce pliage est noté $p_4(A, d, B)$.

COMMENT NOTER UNE SUCCESSION DE PLIAGES : UN EXEMPLE

On considère un point M situé à l'intérieur d'une feuille rectangulaire $ABCD$.



Situation de départ

On réalise le pliage $p_2(M, (AD))$.

On réalise le pliage $p_2(M, (AB))$.

On obtient un point I sur $[AD]$ et un point J sur $[AB]$. On admet que $MIAJ$ est un rectangle.

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Partie I

Des annexes à découper et à coller sur la copie sont fournies en page 9 du sujet pour cette partie.

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

La figure de l'annexe 1 représente une feuille rectangulaire sur laquelle figurent une droite d et un point A n'appartenant pas à d.

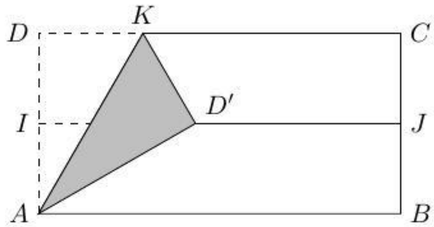
1. **a.** Découper l'annexe 1 puis y construire par origami la droite passant par A et parallèle à d.
b. Donner la succession des pliages ayant permis cette construction.

2. La figure de l'annexe 2 représente une feuille rectangulaire dont deux coins sont nommés A et B.
a. Découper l'annexe 2 puis y construire par origami le point C de telle sorte que le triangle ABC soit équilatéral. Marquer le point C.
b. Construire par origami le triangle équilatéral ABC.
c. Donner la succession des pliages ayant permis cette construction.

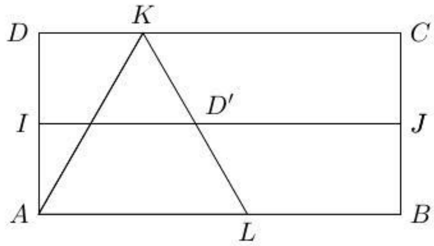
Partie II

Sur une feuille rectangulaire $ABCD$, on effectue successivement les pliages suivants :

- $p_3(A, D)$: on obtient la médiatrice de $[AD]$. Cette médiatrice coupe $[AD]$ en I et coupe $[BC]$ en J ;
- $p_4(D, (IJ), A)$: on obtient le point D' appartenant à (IJ) et la médiatrice de $[DD']$. Cette médiatrice coupe $[DC]$ en K.



- $p_1(K, D')$: on obtient la droite (KD'). Celle-ci coupe $[AB]$ en L.

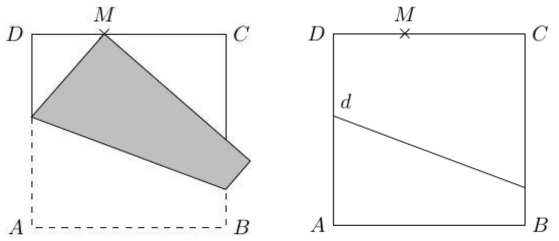


1. Démontrer que le triangle AKL est équilatéral.

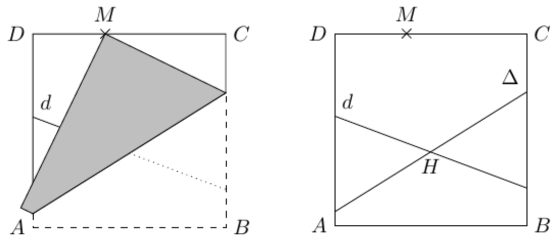
Partie III

Sur une feuille de papier carrée $ABCD$, on note M un point du segment $[CD]$ et on effectue successivement les pliages suivants :

- $p_3(A, M)$: on obtient la droite d



- $p_3(B, M)$: on obtient la droite Δ



On note H le point d'intersection des deux droites d et Δ.

1. Démontrer que lorsque M parcourt le segment $[CD]$, le point H se déplace sur une droite que l'on précisera.

2. Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, on note t la distance DM ; on a donc $0 \leqslant t \leqslant 1$.

a. Donner les coordonnées des points A, B, C, D et M.

b. Montrer que l'ordonnée y_H du point H vérifie $y_H = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$.

c. Justifier que lorsque M parcourt le segment $[CD]$, l'ensemble des points H est un segment dont on précisera les coordonnées des deux extrémités.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Triplets solidaires

On appelle **triplet** toute liste ordonnée de trois nombres réels.
Par exemple, $(20\,;3\,;2024)$ et $(3\,;20\,;2024)$ sont deux triplets différents.

On dit qu'un triplet de nombres réels $(x\,;y\,;z)$ est **solidaire** si, pour chaque paire d'éléments du triplet choisie, la différence entre la somme de ces deux nombres réels et le nombre réel restant est positive, c'est-à-dire si :

$$x+y-z\geq 0 \quad , \quad x+z-y\geq 0 \quad \text{et} \quad y+z-x\geq 0.$$

Par exemple, le triplet $(2\,;3\,;1)$ est solidaire. En effet :

$$2+3-1\geq 0 \quad , \quad 2+1-3\geq 0 \quad \text{et} \quad 3+1-2\geq 0.$$

Partie I

1. Montrer que le triplet $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\right)$ est solidaire.

2. En déduire cinq autres triplets solidaires différents écrits avec les trois nombres réels $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

3. Le triplet $(7{,}4\,;\,-1{,}2\,;5{,}8)$ est-il solidaire ?

4. Montrer que si $(x\,;y\,;z)$ est un triplet solidaire, alors x, y et z sont positifs ou nuls.

5. Soit $(x\,;y\,;z)$ un triplet solidaire avec x, y et z **deux à deux distincts** ; démontrer qu'aucun des nombres réels x, y et z n'est nul.

Partie II

1. Écrire une fonction `testSolidaire` en Python qui prend comme arguments trois nombres x, y et z et qui renvoie `True` si le triplet $(x\,;y\,;z)$ est solidaire et `False` s'il ne l'est pas.

2. On souhaite déterminer le nombre de triplets solidaires de la forme $(x\,;y\,;2024)$ où x et y sont des nombres entiers positifs ou nuls, inférieurs ou égaux à 2024.

a. Écrire un programme Python permettant d'obtenir ce nombre.
Ce programme pourra faire appel à la fonction `testSolidaire`.

b. Donner le résultat obtenu.

Partie III

On considère dans cette partie les triplets de nombres réels de la forme $(x\,;y\,;y)$.

1. Pour quel(s) nombre(s) réel(s) x le triplet $(x\,;x\,;x)$ est-il solidaire ?

2. Montrer qu'il n'existe qu'un seul nombre réel x tel que le triplet $(x\,;0\,;0)$ soit solidaire.

3. **a.** Pour quel(s) nombre(s) réel(s) x le triplet $(x\,;1{,}5\,;1{,}5)$ est-il solidaire ?

b. Déterminer le(s) nombre(s) réel(s) y tel(s) que le triplet $(4{,}6\,;y\,;\,y)$ soit solidaire.

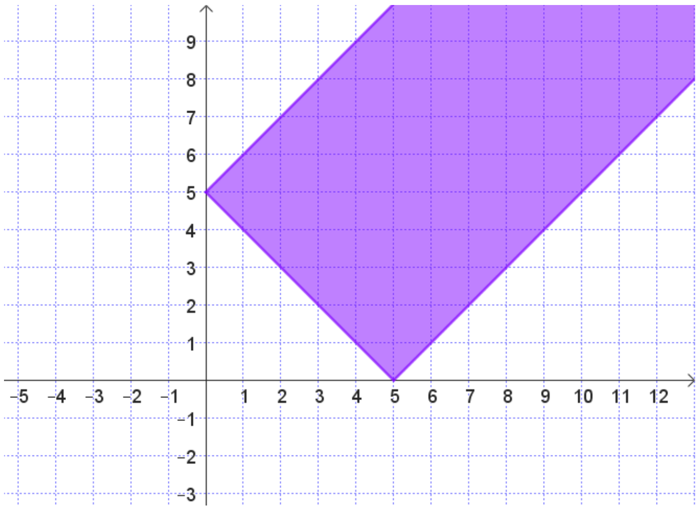
4. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
À chaque triplet de nombres réels de la forme $(x\,;y\,;y)$, on associe le point du plan de coordonnées $(x\,;y)$.
Construire un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et hachurer l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;y)$ associés aux triplets solidaires $(x\,;y\,;y)$.

Partie IV

On considère dans cette partie les triplets $(x\,;y\,;z)$ solidaires où x, y et z sont des nombres réels.
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
À chaque triplet $(x\,;y\,;z)$, on associe le point du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

1. Construire un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et hachurer l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\,;y)$ associés aux triplets solidaires $(x\,;y\,;1)$.

2. On a grisé ci-dessous une partie du plan. À quels triplets solidaires sont associés les points de coordonnées $(x\,;y)$ appartenant à cet ensemble ?



Partie V

L'objectif de cette partie est de montrer que les triplets solidaires $(x\,;y\,;z)$ vérifient la propriété (P) donnée ci-dessous :

$$(P) : \ (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \leq xyz.$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, le triplet solidaire $(x\,;x\,;x)$ vérifie la propriété (P).

2. Démontrer que les triplets solidaires de la forme $(x\,;y\,;y)$ vérifient la propriété (P).

3. **a.** Démontrer que, pour tous nombres réels x, y et z, on a $(x+y-z)(x+z-y) \leq x^2$.

b. Démontrer que les triplets solidaires $(x\,;y\,;z)$ vérifient la propriété (P).

4. Tous les triplets vérifiant la propriété (P) sont-ils solidaires ? Justifier.

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

Quel jour de la semaine était-ce ?

Le 23 mars 1776 naissait en Allemagne Amalie Emmy Noether, une femme considérée comme une des plus grandes mathématiciennes de tous les temps. Le 12 mai 1977, presque 200 ans plus tard, naissait en Iran Maryam Mirzakhani, la première femme à recevoir la médaille Fields (équivalent du prix Nobel en mathématiques).
En plus d'être deux génies des mathématiques, la légende prétend qu'elles sont nées le même jour de la semaine…

Rappel sur les années bissextiles
Une année comporte 12 mois de 30 ou 31 jours excepté le mois de février qui comporte 28 jours les années non bissextiles et 29 jours les années bissextiles. Les années bissextiles sont donc les années qui comportent 366 jours.

Les années divisibles par 4 mais pas par 100 sont bissextiles.
Les années divisibles par 400 sont bissextiles.
Toutes les autres années ne sont pas bissextiles.

2024 est bissextile : en effet, 2024 est divisible par 4 mais pas par 100.
2000 était bissextile : en effet, 2000 est divisible par 400.
2100, 2200, 2300 ne seront pas bissextiles : en effet ces nombres sont divisibles par 4 et par 100 mais pas par 400.

Partie I : Les jours de Pi entre les années 2000 et 2099

Dans cette partie, on considérera les années comprises entre 2000 et 2099. On précise que, sur cette période, les années bissextiles sont les années divisibles par 4.

1. On appelle jour de Pi le 14 mars car cette date se traduit en anglais américain par March the 14th ou «3/14 » ce qui rappelle la valeur approchée usuelle du nombre π.
- **a.** Quel jour de la semaine était le jour de Pi de cette année 2024 ?
- **b.** Montrer que, cette année, le 11 juillet sera un jeudi.
- **c.** Quel jour de la semaine sera-t-on le 8 août 2024 et le 7 novembre 2024 ?
- **d.** Justifier que, quelle que soit l'année, les dates du 11 juillet, 8 août et 7 novembre sont toujours le même jour de la semaine que le jour de Pi.
- **e.** Montrer que si le jour de Pi est un mardi, alors le dernier jour du mois de février est un mardi.
- **f.** Établir selon que l'année est bissextile ou non, lequel du 3 ou du 4 janvier tombe le même jour que le jour de Pi.

2. Dans une année donnée, il est ainsi possible de repérer chaque mois au moins une date qui est un jour de la semaine identique au jour de Pi. Le tableau ci-après propose quelques dates de ce type. Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question **1.** uniquement.

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
Année Bissextile	…	…	14	04	09	06	…	…	05	10	…	12
Année non bissextile	…	…	14	04	09	06	…	…	05	10	…	12

Pour déterminer quel jour de la semaine correspond à la date que l'on cherche, il suffit ainsi de savoir quel jour de la semaine est le jour de Pi d'une année donnée puis d'utiliser le tableau précédent comme point de repère.

3. On suppose, dans cette question, que le jour de Pi d'une année donnée est un lundi. On se demande quel jour de la semaine sera le jour de Pi l'année suivante.
   a. Répondre à la question si l'année suivante n'est pas bissextile. Justifier.
   b. Répondre à la question si l'année suivante est bissextile. Justifier.

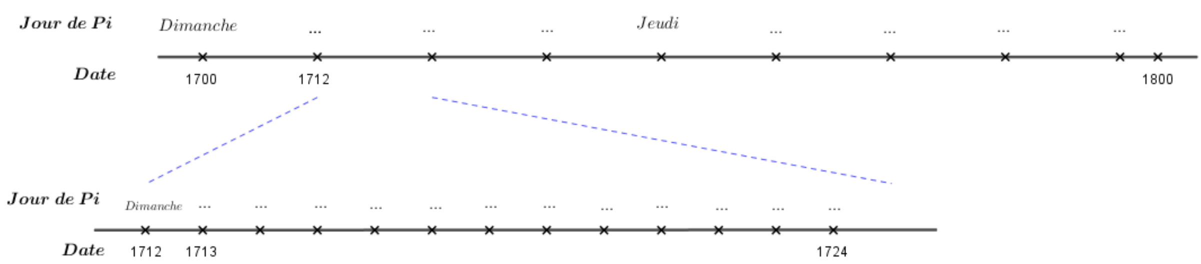
Partie II : Les jours de Pi des années divisibles par 100

1. Le jour de Pi de l'année 1700 était un dimanche. Montrer que le jour de Pi de l'année 1800 est un vendredi.
2. Le jour de Pi de l'année 1900 est un mercredi. En déduire le jour de la semaine du jour de Pi de l'année 2000.
3. À l'aide de vos résultats, recopier et compléter le tableau suivant :

	1700	1800	1900	2000
Jour de Pi	Dimanche		Mercredi	

Partie III : Les jours de Pi entre les années 1700 et 1799

1. Montrer qu'entre 1700 et 1799, le jour de Pi se décale d'un jour tous les 12 ans.
2. Recopier et compléter le schéma ci-dessous pour que chaque graduation des deux axes corresponde au jour de la semaine du jour de Pi pour les années entre 1700 et 1799.



3. En déduire le jour de Pi de 1776.
4. Déterminer quel jour de la semaine est née Amalie Emmy Noether.

Partie IV : Sont-elles nées le même jour de la semaine ?

La légende selon laquelle Amalie Emmy Noether et Maryam Mirzakhani sont nées le même jour de la semaine est-elle vraie ? Justifier.

Annexes de l'exercice 1 (pour tous les candidats) - partie I