La théorie des nombres cantoriens et la théorie des Idées platoniciennes.

Pour l'équipe du laboratoire de mathématiques de Jules Fil – David Marino

Résumé : L'objectif de cet article est d'essayer de montrer que la structure de la théorie mathématique des nombres échafaudée par Georg Cantor (1845-1918) peut être vue comme une théorie platonicienne des Idées et plus particulièrement des Nombres-Idées platoniciens.

Introduction.

Platon (vers 428-347 av JC) est le philosophe qui a irrigué toute la philosophie occidentale et irrigue encore la philosophie contemporaine avec sa théorie des Idées. Cantor a défini une mathématique des nombres non seulement finis mais surtout infinis. Il a appelé ces derniers, des nombres transfinis. Il s'est intéressé pour les définir à la notion d'ensemble : il a donc développé la théorie des ensembles qui porte en elle, tout l'édifice des mathématiques.

Quels liens pourrait-il y avoir entre la théorie platonicienne des Idées et la théorie des nombres développée par Cantor via sa théorie des ensembles ? Nous essaierons de montrer que la théorie des nombres cantoriens est une illustration dans le champ des mathématiques de la théorie platonicienne des Idées et plus précisément des Nombres-Idées platoniciens.

1. Idées platoniciennes.

1.1 Théorie platonicienne

Platon ouvre et développe l'Académie, une école philosophique qui prône la théorie des Idées. Les Idées selon Platon est un monde idéal au-dessus du monde sensible dans lequel nous vivons. Dans ce monde idéal, les idées sont des réalités immuables et éternelles. Deux mouvements sont perceptibles entre le monde idéal platonicien et le monde sensible : un mouvement ascendant et un mouvement descendant.

Premièrement, dans le mouvement ascendant, on va des choses sensibles (concrètes) aux Idées : par exemple, un bel arbre, puis la beauté de la nature participe à comprendre l'idée générale qui est l'Idée de Beauté se situant dans le monde des Idées. De la même façon dans le monde sensible, une action bonne participe à l'Idée de Bien. Pour Platon, l'Idée de Bien est la plus grande et la plus importante des Idées. Pour le dire rapidement, l'Idée de Bien se confondra avec l'Idée de l'Un (l'unité de toute chose, l'Être). Selon nous, l'Un agrège et englobe toutes les Idées platoniciennes tout en étant supérieur à toutes les autres.

Dans le mouvement descendant, la connaissance de l'Idée de Bien ou de l'Idée de l'Un permet de reconnaître le bien dans telles ou telles actions qui s'inscrit dans le monde sensible.

Autrement dit, ce mouvement descendant permet l'incarnation des Idées éternelles dans les choses concrètes du monde.
Le mouvement descendant se fait par dièrèse ou division. La dièrèse est un procédé dichotomique comme l'illustre le schéma suivant[1] :

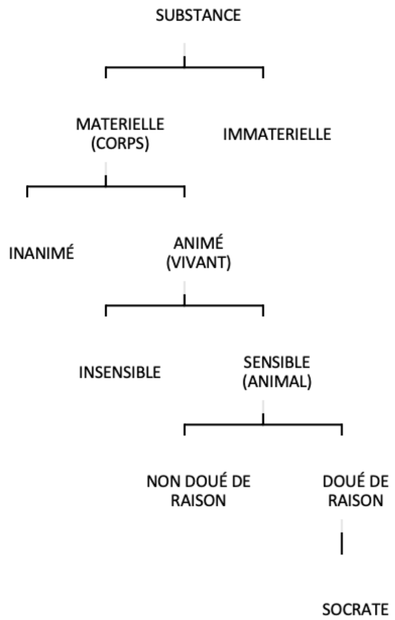

Figure 1 : Arbre de Porphyre

Dans un premier temps, le concept peut être défini comme une propriété commune que partagent certains objets. La Figure 1 permet de définir le concept d'homme. Ainsi, la compréhension de ce concept s'enrichit en s'affinant à chaque dièrèse (division). Par contre, le nombre d'objets qui ont la même propriété diminue
Le mouvement ascendant donne l'Idée platonicienne. Au départ, par exemple, l'on part de Socrate qui est un homme et, par extension, l'on essaie d'atteindre l'Idée de l'Homme comme une substance idéale et éternelle.
Nous venons décrire succinctement la théorie des Idées de Platon dans un cadre où les concepts sont issus et définis à partir du langage naturel. Nous allons dorénavant nous intéresser la théorie platonicienne des nombres qui, nous le verrons, s'adosse et s'enracine dans la théorie des Idées. Nous prendrons appui sur le travail de Léon Robin[2] et Albert Rivaud[3].

---

[1] Jean-Pierre Belna (2005) « Histoire de logique », ellipse p :54
[2] L. Robin, *Théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote*, *Étude Historique et Critique* Paris, Felix Alcan Éditeur, 1908.
[3] A. Rivaud, *Léon Robin. La théorie platonicienne des Idées et des Nombres d'après Aristote, étude historique et critique*, Revue des études grecques, 1908, 21-93-94, pp 397-402

1.2 Nombres Idées

Pour Platon, il existe deux types de nombre qui appartiennent à deux mondes différents. Le premier type est le Nombre-Idée. Ce Nombre-Idée n'est pas un nombre au sens de la quantité mais au sens de qualité[4]. Autrement dit, il appartient au monde des Idées qui est éternel et immuable. Ce Nombre-Idée est donc une idée platonicienne et une qualité par essence. Le deuxième type de nombre permet de compter et de quantifier des objets. Ce type de nombre peut être vu comme des nombres mathématiques classiques qui seraient les entiers naturels. Ce type de nombre est avant tout une quantité.

D'après Aristote (av 384- av 322), les Nombres-Idées sont l'union de deux principes : la monade et de la dyade. La monade est constituée d'un seul élément formel et limité. La dyade, au contraire, est un élément matériel illimité du grand et du petit. Le grand et le petit permettent l'augmentation et la diminution. Ainsi les deux principes qui sont l'Un (la monade) et la dyade du grand et du petit, permettent de constituer les nombres numériques du monde sensible.

Selon Aristote, la théorie des Nombres-Idées s'enracine dans le monde des Idées. Par contre le deuxième type de nombre est constitué des nombres mathématiques distincts à la fois des choses sensibles et des Idées. Ainsi ce deuxième type de nombres correspond à des quantités : ils servent à quantifier des quantités. Ils se situent entre le monde sensible et le monde des Idées. les Nombres-Idées et les Idées appartiennent au même monde, celui du monde Idéal. Les nombres mathématiques (quantité) et les Nombres-Idées (qualités) sont de natures différentes. Si les premiers peuvent donc s'ajouter, se soustraire, les Nombres-Idées, eux, sont individuels, indivisibles et éternels. Les Idées platoniciennes et les Nombres-Idées platoniciens ont les mêmes attributs, ceux du monde Idéal, ceux de l'immuabilité et de l'éternité.

Selon nous, nous pouvons faire correspondre le couple (choses sensibles - Idées) et le couple (nombres mathématiques -Nombres Idées). Plus précisément, les nombres mathématiques participent aux Nombres-Idées comme les choses sensibles participent aux Idées platoniciennes. Les nombres mathématiques donnent des exemples d'existence aux Nombres-Idées comme les choses sensibles, c'est-à-dire concrètes de notre monde, montrent l'existence des Idées éternelles.

Enfin, pour Léon Robin, à partir d'un certain moment de son enseignement, Platon ne fera plus de différence entre les Idées et les Nombres-Idées même si ces derniers se situent au-dessus des

[4] Par exemple, dans la phrase : « Platon est sage », la qualité est la sagesse que l'on attribue au sujet Platon. Par contre, les phrases « Tous les hommes sont sages » ou « quelques hommes sont sages », la quantité se situe dans les quantificateurs « Tous, quelques… »

Idées. L'argument essentiel est que les Nombres-Idées comme les Idées ne peuvent pas être des quantités mais uniquement des qualités. Par contre, les nombres mathématiques sont uniquement des quantités et se situent, comme nous l'avons déjà mentionné, au-dessus des choses sensibles et concrètes. Selon nous, les mathématiques chez Platon ont un statut hiérarchique plus important que les Idées issues du langage naturel.

En conclusion à cette section, nous nous permettons le commentaire suivant : le couple (choses sensibles / Idées) et le couple (nombres mathématiques / Nombres Idées) participent à la théorie platonicienne des Idées : les Nombres-Idées sont dessus des Idées dans le monde Idéal platonicien. Les nombres mathématiques sont au-dessus des choses sensibles mais compris de façon intermédiaire entre le monde sensible et le monde idéal. En définitive, les Nombres-Idées génèrent les nombres mathématiques avec l'union deux principes : la monade et la dyade.

La théorie cantorienne et la théorie platonicienne semblent différentes par nature : la première est devenue l'édifice théorique de toutes les mathématiques modernes et la deuxième est avant tout une conception philosophique qui a alimenté et alimente encore toute la philosophie. Finalement, quels liens pourrait-on établir entre la théorie des Idées de Platon et la théorie des ensembles du mathématicien Cantor ? Comment l'édifice mathématique cantorienne peut-il prendre appui sur la conception philosophique des Idées de Platon ? Pour essayer de répondre à ces questions, nous nous appuierons notamment sur les ouvrages de Nathalie Charraud[5] et Jean-Pierre Belna[6].

2. Théorie des ensembles.

2.1 Histoire de la théorie des ensembles.

Au XIX$^{\text{ième}}$ siècle, Georg Cantor développe la théorie des ensembles. Il est amené à s'intéresser à la notion d'ensemble pour tenter de définir rigoureusement les nombres finis et les nombres transfinis qui sont des nombres infinis. Il donnera plusieurs définitions d'un ensemble. Dans son ouvrage, *Les Contributions*, Cantor nous dit : « Par "ensemble", nous entendons tout rassemblement M en un tout d'objets m de notre intuition et pensée, déterminés et bien différenciés (ces objets seront appelés les éléments de M)[7] ». Ainsi, tous les éléments de l'ensemble sont pris dans une seule totalité : l'ensemble lui-même est pris comme un seul objet ayant les propriétés de chacun des éléments. Une autre définition de Cantor précise que « par

[5] Nathalie Charraud (1999) « Le réel en mathématiques, psychanalyse et mathématiques », Algama éditeur, Diffusion le seuil.

[6] Jean-Pierre Belna (2009) « Histoire de la Théorie des ensembles », édition ellipses, collection l'esprit de la science

[7] J.-P. Belna, *Histoire de la théorie des ensembles* », Paris, Ellipse, 2009, p. 71.

“multiplicité” ou ensemble, j’entends de manière générale Plusieurs qui peut être pensé comme Un, c’est-à-dire toute collection d’éléments déterminés qui peut être combinée en un tout par une loi[8,9]. » Autrement dit, l’ensemble cantorien est constitué d’une part de tous les éléments de l’ensemble, et, d’autre part de l’ensemble lui-même : une même loi est partagée par chacun des éléments et l’ensemble lui-même. Donc chez Cantor, un ensemble peut être défini par une caractérisation extensionnelle (collection d’objets munie d’une certaine propriété) et d’une caractérisation en compréhension non restreint[10] (propriété sur la collection d’objets et sur l’ensemble désignée comme un tout.) Pour Cantor, il existe donc des ensembles finis et des ensembles infinis. Un ensemble infini est un ensemble qui contient un nombre fini d’éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui contient un nombre infini d’éléments. Avec ces définitions ensemble, Cantor va considérer l’ensemble infini des entiers naturels noté $\mathbb{N}$ comme une totalité, comme un tout. L’ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble totalement ordonné dont la cardinalité (nombre d’éléments de $\mathbb{N}$) est un nombre transfini aleph 0 noté $\aleph_0$.

Derrière ce nombre transfini, $\aleph_0$ se cache toute la caractérisation de l’infini actuel. Avant Cantor et même, depuis Aristote, l’infini actuel[11] était inaccessible par la pensée humaine. Il était l’apanage des dieux ou de Dieu. Il n’était donc pas permis pour un homme de se doter des attributs d’un dieu. Cantor donne à l’infini actuel une vision mathématique défiant l’ordre établi, vieux de plus de 2000 ans.

Nous allons dans le prochain paragraphe considérer la théorie des ensembles appliquée aux nombres infinis d’éléments c’est-à-dire appliquée aux transfinis. Pour cela nous nous aiderons d’un article sur les ensembles infinis de Florian Reverchon[12] et d’un ouvrage de Jean-Pierre Belna[13].

---

[8] Ibid., p. 70.

[9] Dans la définition d’ensemble même ceux qui sont infinis, Cantor autorise le tiers exclu qui stipule que la proposition ou la négation de cette même proposition sont vraies mais pas les deux vraies en même temps.

[10] La théorie des ensembles de Cantor dite naïve est élaborée selon deux axiomes : un premier axiome dit d’extensionnalité postule que deux ensembles sont égaux si et seulement s’ils ont le même nombre d’éléments et un deuxième axiome dit de compréhension sans restriction qui affirme que les éléments de l’ensemble et l’ensemble lui-même partage la même propriété.

[11] Infini actuel est à différencier de l’infini potentiel.
Par exemple, pour le nombre pi, l’infini potentiel est l’ajout des décimales sans jamais atteindre la totalité du nombre pi. L’infini actuel serait la caractérisation du nombre pi totalisé.
Par ensemble, pour l’ensemble des entiers naturels, l’infini potentiel est la génération du nombre entier suivant par l’ajout de +1, sans jamais atteindre la totalité de l’ensemble $\mathbb{N}$. L’infinie actuel est la totalité des élément de l’ensemble qui est $\aleph_0$.

[12] Article de Florian Reverchon à l’adresse : https://culturemath.ens.fr/thematiques/logique/decouvrir-l-infini-construire-des-infinis

[13] L’exposé prend appui sur Jean-Pierre Belna (1996) « la notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege » édition Vrin

2.2 Cours de mathématiques sur les ensembles infinis.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est donc l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$. En considérant l'ensemble $\mathbb{N}$ dans sa totalité, Cantor va appeler puissance d'un ensemble la cardinalité de cet ensemble c'est-à-dire le nombre de nombres entiers de $\mathbb{N}$. Le cardinal noté en mathématiques $card\ (\mathbb{N})$, Cantor va lui assigner une lettre hébraïque et le nommer « aleph 0 » notée $\aleph_0$. Dans $card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0$, ce nombre $\aleph_0$ est le premier nombre transfini que Cantor construit par écriture. Cantor acquiert une écriture symbolique pour appréhender l'infini et fonder une arithmétique qui s'étend au-delà du fini. À partir du premier nombre infini $\aleph_0$, Cantor développe une arithmétique de l'infini. Cantor à l'aide de cette nouvelle écriture et de la réussite ou de la non réussite de la mise en correspondance (en bijection) entre deux ensembles va démontrer que deux ensembles ont la même cardinalité ou pas.

Rappelons qu'un ensemble infini est dénombrable lorsqu'il peut être mis en bijection avec une de ses parties propres. Prenons par exemple l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, 3, 4, ... qui est de cardinalité $\aleph_0$ et l'ensemble des entiers pairs 0, 2, 4, 6, 8, ... La question est de savoir si ces deux ensembles $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ ont la même cardinalité ou si le nombre d'éléments contenus dans $\mathbb{N}$ est plus grand que le nombre d'éléments contenus dans $2\mathbb{N}$. Tout entier n de l'ensemble des entiers naturels, on peut lui faire correspondre l'entier 2n. Ainsi même si l'ensemble des entiers pairs est contenu dans l'ensemble des entiers naturels. La taille de ces deux ensembles infinis est le même (sous réserve de caractériser la relation « avoir la même taille que » pour des ensembles par l'existence d'une correspondance biunivoque (une bijection entre les deux)). Donc si $card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0$ alors $card\ (2\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Nous pouvons donc écrire l'égalité suivante : $\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{2}$.

Donc l'infini cantorien remet en question l'assertion chère notamment aux grecs de l'antiquité qui est « le tout est plus grand que la partie ». Ainsi, il est possible de définir des ensembles infinis qui sont aussi grands qu'une de leur partie. Un ensemble E mis en bijection avec $\mathbb{N}$ sera dit dénombrable. On peut montrer que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble tel que $\mathbb{Z} = \{\dots, -2; -1;\ 0;\ 1;\ 2; \dots\}$ est dénombrable donc $card(\mathbb{Z}) = card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0$. De la même façon, le résultat peut paraître surprenant mais l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est également dénombrable. Les nombres de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs et $q \neq 0$.

Donc $card(\mathbb{Q}) = card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Donc les ensembles, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont la même taille c'est-à-dire le même nombre d'éléments. Cantor s'est posé la question de savoir si l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ c'est-dire les entiers relatifs, rationnels et irrationnels a un nombre d'éléments plus grand que l'ensemble $\mathbb{N}$.
Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs et p différent de 0 comme par exemple $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, \ldots$ A l'aide du procédé diagonal, procédure inventée par Cantor lui-même, il est possible de montrer non pas directement que le cardinal de $\mathbb{R}$ est strictement supérieur au cardinal de $\mathbb{N}$ mais de montrer que l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 noté $[0;1]$ est strictement supérieur au cardinal de $\mathbb{N}$.
Ensuite sachant que l'ensemble $[0;1]$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$, la démonstration s'achève avec les résultats suivants : $card[0;1] > \aleph_0$ et $card\ \mathbb{R} > \aleph_0$. Donc Cantor montre qu'il y plus d'éléments dans $[0;1]$ que dans $\mathbb{N}$. Nous dirons que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et est à la puissance du continu. D'un point de vue géométrique, il est impossible de compter et donc d'énumérer le nombre de points dans un segment de longueur 1 alors qu'il est possible de compter et d'énumérer le nombre d'éléments dans $\mathbb{N}$. Pour l'instant, nous pouvons dire qu'il existe deux types d'infinis : le dénombrable (l'ensemble $\mathbb{N}$ de cardinalité $\aleph_0$) et le non dénombrable (l'ensemble $\mathbb{R}$ de cardinalité strictement supérieure à $\aleph_0$).
Cantor a voulu répondre à la question : existe-t-il d'autres ensembles infinis ? Le nombre de ces ensembles infinis est-il fini ou infini ?
En partant de la propriété du nombre de parties[14] d'un ensemble E et à l'appliquant à la cardinalité de l'infini dénombrable $\mathbb{N}$, Cantor montre que le nombre de parties de $\mathbb{N}$ est $2^{\aleph_0}$. Il montre également que $card\ \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$. Ainsi, il est alors possible de montrer que le nombre d'ensembles infinis est infini et que ces ensembles sont ordonnés.
Cantor montre que $card\ (\mathbb{N}) = \aleph_0$ et d'autre part que $card\ (\mathbb{R}) = P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$ où $P(\mathbb{N})$ est le nombre d'ensembles de parties de l'ensemble des entiers naturels.
En itérant ce procédé, Cantor génère une suite de cardinaux infinis : $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... où chaque terme de la suite est le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble le précédant.
Cantor génère une autre suite de $\aleph$ en introduisant le concept des types ordinaux transfinis. Le terme ordinal fait référence à l'ordre dans un ensemble. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'opérateur $\leq$ « plus petit que » est bien ordonné. Ainsi $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément l'entier

[14] Donnons un exemple du nombre de parties d'un ensemble à 3 éléments noté E tel que $E = \{a, b, c\}$ les sous-ensembles de l'ensemble E sont : $\emptyset$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a; c\}$; $\{b; c\}$; $\{a, b, c\}$ où $\emptyset$ est l'ensemble vide. Ainsi le nombre d'ensemble de parties de E noté P(E) est $P(E) = 8 = 2^3$. Plus généralement, un ensemble E à n éléments à pour nombre d'ensemble de parties 2^n

0 et l'ordre sur cet ensemble s'écrit $0 < 1 < 2 < 3$ .... Cantor fonde l'arithmétique transfinie sur « les opérations fondamentales des nombres, qu'ils soient finis ou infinis bien déterminés, [s'appuyant] de la manière la plus simple sur le concept du système bien ordonnée.[15] » A partir de la notion d'ordinal de première classe et d'ordinal de deuxième classe, Cantor construit des nombres transfinis, $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ Un ordinal de première classe est un ensemble ordonné qui n'a pas besoin d'un plus petit élément tandis qu'un ordinal de seconde classe est un ensemble bien ordonné qui contient à la différence de l'ordinal de première classe un plus petit élément. A partir de ces considérations, Cantor démontre que les ordinaux de la première et deuxième classe peuvent s'écrire selon la suite croissante suivante :

$$0,1; 2; \ldots; n; n+1; \ldots \omega; \omega+1; \ldots;\ \omega+\omega = \omega.2; \ldots; \omega.n; \ldots \omega.\omega = \omega^2; \ldots; \omega^k; \ldots$$

Où le nombre d'éléments de l'ensemble $\{0; 1; 2; \ldots; n; n+1; \ldots \omega\}$ est $\aleph_0$

Et le nombre d'éléments de l'ensemble :

$\{0,1; 2; \ldots; n; n+1; \ldots \omega; \omega+1; \ldots;\ \omega+\omega = \omega.2; \ldots; \omega.n; \ldots \omega.\omega = \omega^2; \ldots; \omega^k; \ldots\}$ est $\aleph_1$

Cantor itère ce procédé en considérant cette fois l'ensemble des ordinaux $\aleph_1$. Cela crée l'ensemble des ordinaux $\aleph_1$, ainsi de suite.

Pour résumer Cantor génère deux types de suite infinie d'infinis : la première construite sur les cardinaux infinis : $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... et la deuxième construite sur les ordinaux : $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

Cantor se pose des questions sur le continu. Ce questionnement prendra le nom de « l'hypothèse du continu » dont la question est de savoir si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Cantor passera le reste de sa vie à essayer de démontrer cette égalité car il avait l'intuition que le transfini $\aleph_1$ qui suivait le transfini $\aleph_0$ ne pouvait qu'être que le continu c'est-à-dire $\mathbb{R}$. Il avait donc également l'intuition qu'il n'existait pas de transfinis intermédiaires entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$.

3. Cantor : élève de Platon

3.1 Cantor est platonicien

Cantor ne parle pas de mathématiques pures mais plutôt de mathématiques libres. Pour lui, l'existence d'un objet mathématique et plus généralement d'une notion mathématique réside dans la formation correcte de cet objet et de cette notion qui se développe librement. Dans ce sens, Cantor écrit :

« La mathématique est pleinement libre dans son développement et ne connaît qu'une seule obligation, ... ses concepts doivent être non contradictoires en eux- mêmes et soutenir d'autre part avec les concepts déjà formés antérieurement, déjà présents et

[15] Nathalie Charraud (1999) « Le réel en mathématiques, psychanalyse et mathématiques », Algama éditeur, Diffusion le seuil. p :110

assurés, des relations fixes, réglées par les définitions. En particulier, pour pouvoir introduire de nouveaux nombres, elle est seulement requise d'en donner des définitions leur conférant une précision et le cas échéant une relation aux anciens nombres telles que l'on puisse dans des cas donnés les distinguer les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et réel dans la mathématique[16]. »

Cette liberté mathématique soutenant l'existence de l'objet mathématique, en l'occurrence les nombres transfinis est propre à la conception cantorienne des mathématiques. Elle stipule que les nombres transfinis ont une existence au même titre que les nombres finis. En somme, pour Cantor, un objet mathématique existe s'il ne contredit aucun énoncé de la théorie. Ainsi, la non contradiction est une condition suffisante pour Cantor pour assurer à l'objet mathématique d'exister. Cantor dépasse la notion de nombre fini en généralisant ces nombres à l'infini. Il les appelle les transfinis. La création de ces nombres transfinis permet le dépassement du dénombrable et de poser la question de la puissance du continu.

De la même manière, la thèse de Robert Muller[17] soutient entre autres que la liberté platonicienne réside dans une autonomie de pensée. Autrement dit, cette liberté se développe au sein de l'esprit. D'ailleurs, la construction cantorienne des ensembles se construit sur « une intuition libre[18] » de pensée.

3.2 Théorie des ensembles et Idées platoniciennes.

Selon nous, le lien entre la théorie des ensembles et l'idée platonicienne réside non seulement dans sa liberté mais aussi dans leur structure même. La théorie des ensembles est une mathématique libre. Cette théorie se construit dans « une intuition libre » de l'esprit. Une correspondance peut être établie entre le couple (nombres mathématiques : Nombres-Idées) et (nombres mathématiques : Transfinis). Comme Nathalie Charraud, nous pensons que Cantor est dans une position platonicienne où le terme d'ensemble vient s'enraciner dans la conception platonicienne des Idées. Dans ce sens, Cantor tient les propos suivants : en terme d'ensemble « je crois définir ainsi quelque chose d'apparenté à [...] l'idée platonicienne ou [...] le Souverain Bien. [...] Il oppose ce terme tout à la fois [...] [à] l'illimité, l'indéterminé [...] c'est-à-dire la limite[19] » des nombres infinis.

---

[16] Jean-Pierre Belna (1996) « la notion de nombre chez Dedekind, cantor, Frege » édition Vrin pp :191

[17] Robert Muller (1997) « la doctrine platonicienne de la liberté » édition Vrin
Thèse de doctorat (1995), « la doctrine platonicienne de la liberté » Paris 4

[18] « Par ''ensemble'', nous entendons tout rassemblement M en un tout d'objets m de notre intuition et pensée »

[19] Nathalie Charraud (2019) « Georg Cantor, infini et Inconscient », édition spartacus p : 149

Ainsi, la structure même de la théorie des nombres de Cantor et plus particulièrement des transfinis résonne (raisonne) dans une structure platonicienne des Idées. Le transfini $\aleph_0$ (aleph 0) est un infini actuel, inimaginable et inatteignable pour les anciens et les modernes. La collection des transfinis, $\aleph_0$, $\aleph_1$(aleph 1), ... est structurée en un mouvement ascendant : on passe des nombres entiers naturels à $\aleph_0$ (dénombrable) puis à $\aleph_1$(continu) puis $\aleph_2$ (aleph 2), ... etc. Il existe un même mouvement non seulement dans la théorie des Idées et dans la théorie des Nombres-Idées mais aussi dans la théorie des nombres de Cantor. En effet, d'une part, la théorie des idées va des choses sensibles vers l'Idée de cette chose sensible. D'autre part, dans un mouvement ascendant, la théorie des Nombres-Idées va des nombres numériques vers le Nombre-Idée dont l'Un platonicien est le plus important et donne l'unité de l'Être. Enfin, la théorie cantorienne des nombres va dans un même mouvement ascendant des entiers naturels vers le transfini aleph 0. Finalement, le Nombre-Idée platonicien est l'Un de l'Être. Nous posons que le transfini aleph 0 aurait et serait la valeur numérique cantorienne de l'Être. Ainsi l'Un platonicien aurait comme valeur, l'infini actuel des entiers naturels c'est-à-dire aleph 0.

Discussion et conclusion

Cantor est platonicien dans sa conception philosophique de l'existence. Sa conception s'appuie, selon nous, sur sa théorie des nombres : cette dernière participe et donne vie à sa pensée.

Sa pensée philosophique et mathématique est libre : l'être platonicien gagne sa liberté par une autonomie de pensée et le mathématicien cantorien développe une théorie libre qui ne rencontre aucune contradiction de ses axiomes. Autrement dit, à l'intérieur d'un esprit libre comme à l'intérieur d'une théorie mathématiques, la liberté est bien une absence de contraintes. Cantor est un mathématicien platonicien : sa pensée est libre et sa mathématique également.

La notion d'ensemble est à rapprocher d'une Idée platonicienne. Les nombres transfinis sont un infini actuel. Or l'infini actuel est selon les anciens et les modernes un attribut de Dieu donc de l'Être absolu. L'infini actuel des nombres des entiers naturels est aleph 0. De plus, l'Un platonicien est le Nombre-Idée de l'Être qui totalise l'ensemble des Idées platoniciennes. Nous faisons donc un lien entre l'infini actuel cantorien et l'idée platonicienne via la notion de l'Être. En conclusion, pour nous, la théorie cantorienne des nombres est une mathématique des Idées platonicienne : Cantor a mathématisé la théorie des Idées de Platon ou plutôt en a donné une modélisation numérique où sont convoqués les nombres entiers naturels et les transfinis. L'Un platonicien est équivalent à l'aleph 0 cantorien. L'Un de l'Être platonicien aurait pour valeur mathématique la valeur transfini aleph 0.