Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation

# Des laboratoires de mathématiques comme lieux de formation et de réflexion pour améliorer les apprentissages des élèves

Aurélie Chesnais

Professeure des Universités, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches en Didactique, Education et Formation (LIRDEF), Faculté d'éducation (FDE), Université de Montpellier

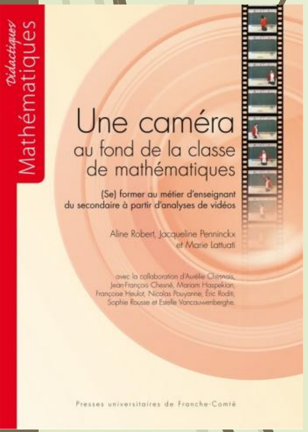
Clermont-L'hérault – 19 novembre 2024

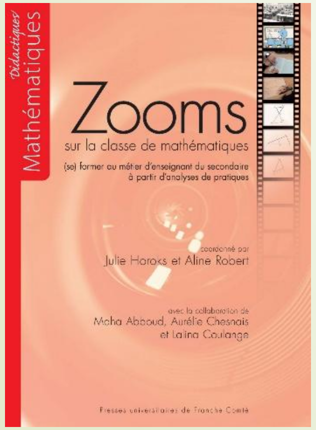
# Mes recherches

- Fonctionnement des pratiques enseignantes en mathématiques
- L'effet des pratiques sur les apprentissages
  - Les inégalités d'apprentissages en lien avec les inégalités sociales
- Le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques
- La formation et le développement professionnel des enseignants de mathématiques
- Des recherches avec une dimension expérimentale
  - À visée à la fois compréhensive et transformative
  - Certaines recherches dans des dispositifs collaboratifs associant chercheurs et enseignants
- Essentiellement sur le début du secondaire (6$^{ème}$) mais aussi quelques recherche sur le lycée, la maternelle et l'élémentaire

# Un cadre théorique sur le fonctionnement des pratiques enseignantes

- Les pratiques des enseignants ne sont pas entièrement régulées par l'enjeu de faire apprendre un contenu à des élèves
  - Une « double approche didactique et ergonomique des pratiques des enseignants de mathématiques » (Robert et Rogalski, 2002, Vandebrouck, 2013)
- Des principes présentés dans
  - Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. PUFC.
  - Horoks, J., Robert, A., (Coord.) & Abboud, M., Chesnais, A. et Coulange, L. (collab.) *Zooms sur la classe de mathématiques. (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de pratiques*



# Les pratiques des enseignants sont

- **complexes**
  - On attrape cette complexité par
    - 5 composantes des pratiques
  - → institutionnelle, sociale, personnelle, médiative, cognitive
    - Trois niveaux d'organisation des pratiques (micro, local, global)

-> complexes parce que les composantes sont imbriquées, de même que les niveaux

- **cohérentes** : existence de logiques d'action qui les sous-tendent
- **stables** pour les enseignants expérimentés

# Des principes qui en découlent pour la formation (Rogalski et Robert, 2015, Abboud, Robert et Roglaski, 2023)

- On s'intéresse au développement professionnel ***sur le plan didactique*** (Chesnais, Leblanc, Constantin, 2024)
  - i.e. susceptible d'avoir un effet assez direct sur les apprentissages des élèves sur un contenu donné
- Pensé comme un **enrichissement** des pratiques, plutôt qu'un changement
- Dans une logique « **remontante** » : partir de l'observation de l'activité des élèves pour remonter aux choix d'enseignement, aux programmes, à l'analyse des savoirs
- « **dénaturaliser** » les connaissances et les attentes disciplinaires et scolaires
- Le rôle du **collectif**
  - La confrontation à des pratiques autres que les siennes contribue à faire prendre conscience de ses propres pratiques, à identifier des choix et des alternatives
  - Le collectif soutient la prise de risque et la légitimité des évolutions
- **« Partir des pratiques »** en visant non pas des « bonnes pratiques », mais de meilleures pratiques

# Quels liens possibles avec les laboratoires de mathématiques ?

# Le point de vue institutionnel sur les laboratoires de mathématiques

- « Projet à l'échelle de l'établissement […], le « laboratoire de mathématiques » est **un lieu d'échanges de pratiques et de réflexion disciplinaire et didactique**, […] pour les enseignants de mathématiques […] qui **vise à accroître l'efficience de l'enseignement à destination des élèves** […]. »
- « Destiné prioritairement aux enseignants, un laboratoire de mathématiques - appelé *labomath* - est un lieu dédié en collège ou en lycée qui vise à contribuer au **développement professionnel en équipe des professeurs**. C'est un lieu privilégié offrant la possibilité de construire localement […] une réflexion didactique et disciplinaire partagée […]. »
- « C'est un projet qui suppose un enrichissement extérieur permanent par **l'intervention continue de partenaires universitaires** (INSPE, IREM, Université, Maisons pour la science, organismes de recherche, etc.) […] »
- « Le labomath propose un **changement majeur de paradigme dans la formation continue des professeurs.** Celle-ci est pensée dans la confiance et en **temps long**, délocalisée […] **entre pairs** […] »

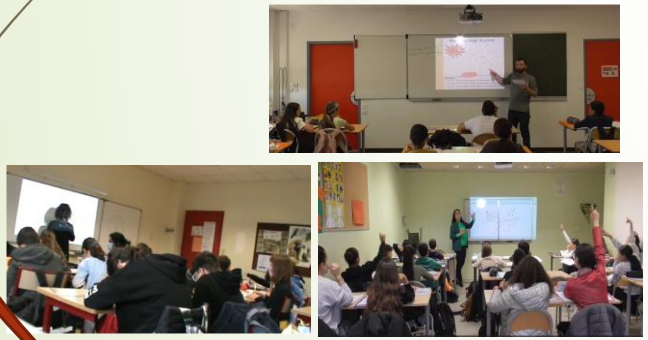
# Deux exemples de recherches collaboratives
# Evocation d’une recherche en cours sur un laboratoire de mathématiques

# Des recherches collaboratives à visée transformative

Point de départ : une difficulté d’apprentissage/d’enseignement identifiée par les enseignant.e.s et les chercheur.e.s

Questionnement sur le contenu (programmes, épistémologique, didactique etc.)

Élaboration de tâches et scénarios sur la base de ce que font les enseignants



Mise en œuvre dans les classes

Analyse + tests

Inspiration de la double approche didactique et ergonomique, des recherches collaboratives (Desgagné et al.) et des Lesson Studies (Batteau et Clivaz)

# Un travail sur mesure et géométrie en 6ème

# Des difficultés d'apprentissage… et d'enseignement

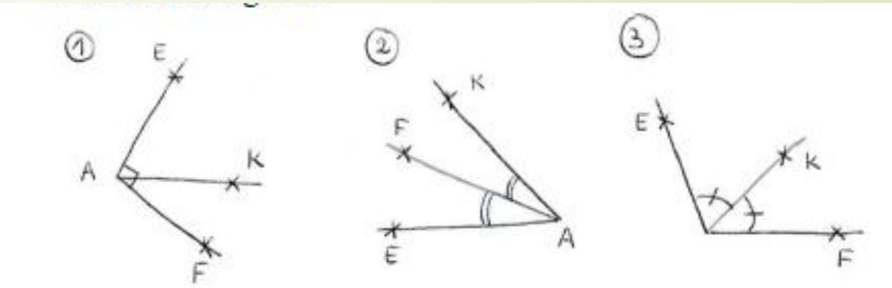
- **Exemple 1 : tâche de l'angle droit (fin de sixième)**
  - Construis un angle $\widehat{ABC}$ de 89°. L'angle $\widehat{ABC}$ est-il un angle droit ? Comment le sais-tu ?
- Moins des 2/3 répondent correctement; 12 % utilisent l'équerre
- 6 % mentionnent le « à 1° près » : « *je le sais car un angle droit est de 90° et l'angle ABC est de 89°et ce n'est qu'un degré avant.* »
- **Exemple 2 : calcul d'une longueur (Jacquier, 1995)**

L'application du théorème de Pythagore donne BD = $\sqrt{50}$ et les élèves concluent :
« Il faut écrire BD=7,07 car $\sqrt{50}$ , pour une longueur, ça ne veut rien dire »

- **Exemple 3 : mesurage VS démonstration**

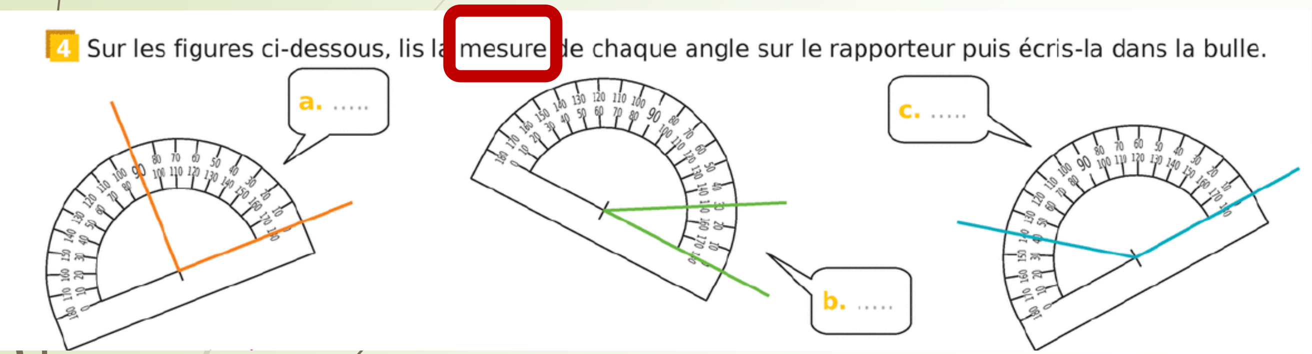
L'angle EAK mesure 56°. Quelle est la mesure de l'angle KAF ?

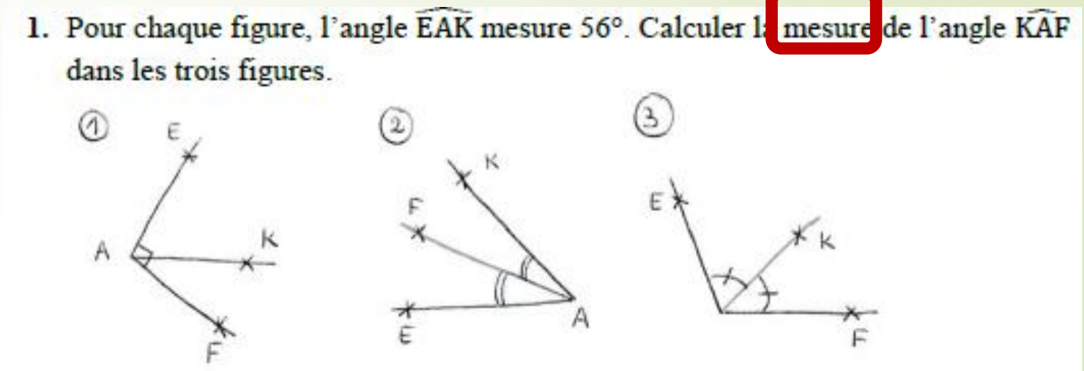
- Mesurage sur le dessin à main levée
- Refaire le dessin aux instruments et mesurer



# Un point de vue de chercheur sur ces difficultés

constat : le mot « mesure » est un mot « polysémique » ?




« [...] *des* ***mesures*** *sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai* » (Triangle 5ème Hatier, 2001, cité par Houdement, 2007)

- Des mesures sur un dessin ne suffisent pas … à prouver des mesures

- La distinction et le rapport entre les deux ne posent pas de problème au mathématicien
  - 1,4 est une valeur approchée au dixième de $\sqrt{2}$
  - le mesurage fournit des conjectures, le théorique modélise et permet de contrôler l'empirique
- Et les apprenants ?

# Une hypothèse : la mesure, un objet qui permet de faire la différence

- Faire une distinction entre les deux sens du mot mesure (Munier et Chesnais, 2016)
  - *Mesure empirique* : obtenue à l'aide d'un instrument; par nature décimale et avec un certain degré de précision
  - *Mesure théorique* : donnée ou établie à partir de données et de démonstrations; nombre réel, valeur exacte
- Incertitude et dispersion associées à la mesure empirique

- Quelle est la mesure de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ?
  - Mesure empirique : 1,4
  - Mesure théorique : $\sqrt{2}$

# Mieux identifier des difficultés

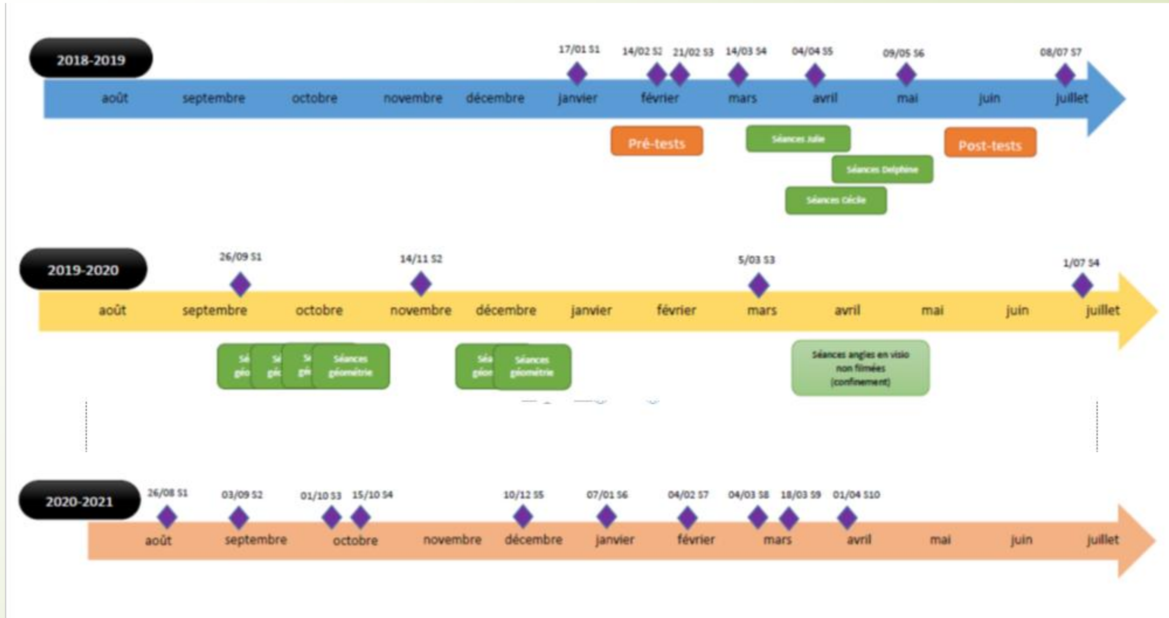
- En début de sixième, tests sur 200 élèves (EP et hors EP) (Chesnais et Munier, 2016)
  - Quelle est la longueur du quart d’une bande de 9,3 cm ? On propose deux réponses : 2,325 obtenu par division ; 2,3 obtenu par la règle
    - 33 % répondent 2,325 cm
    - Élèves qui n’envisagent pas autre chose que le mesurage OU pour qui la division donne une valeur approchée de la mesure empirique
      - 44 % en moyenne ; 12 à 72 % selon les classes; 54% en EP, 36% hors EP
  - *« 2,325 cm n'existe pas en mesures classiques » ; « on dit pas 2,325 cm »*
  - *« J'ai fait 9,3 : 4=2,325. Je l'ai arrondi au dixième car sur une règle graduée il n'y a que les centimètres et les millimètres. »*
- En seconde (Cerclé et al., 2021)
  - *« 3,33333… je ne peux pas le placer sur la droite graduée précisément »*
  - *« racine de 10 c’est trop flou, enfin trop précis du coup on peut pas, […] on peut pas le placer. »*

# Un « savoir » transparent (Chesnais et Munier, 2016, 2024)

- La distinction est « transparente » dans les classes, les programmes, les manuels, les classes etc.
  - Polysémie non identifiée
- La prise en charge dans les classes ordinaires
  - Soit amalgamer les deux
  - Soit opposer les deux
  - Voire des choix très discutables…

# Une « recherche collaborative » (Desgagné et al., 2019)

- Un chercheur-formateur et un groupe d'enseignantes
- Groupe de 4 enseignantes
  - qui a l'habitude de travailler ensemble (préparation commune de presque tout ce qu'elles font) depuis plusieurs années
  - Dans des établissements différents hors EP
  - Dont 2 sur 4 sont peu expérimentées
- Des modalités de travail
  - une dizaine de réunions de travail collaboratif par an
  - Des captations vidéo des réunions et dans les classes
  - Des pré-tests et des post-tests



# Mettre le doigt sur un problème

*Un échange à la réunion 1 après avoir présenté le thème de la mesure et la distinction entre les deux aspects de la mesure*

P1 Tu leur dis : tu n'as pas le droit de mesurer. Ces deux droites [fait un dessin à main levée], comment elles sont ? Elles ne sont pas perpendiculaires. Et là [ajoute le codage], elles le sont.

[…]

P1 « Calcule », c'est bien. […] J'insiste beaucoup sur *calcule* et *mesure*. On ne vous demande pas du tout la même chose. « Mesure » : j'ai le droit de construire, j'ai le droit de prendre ma règle. « Calcule » : non, il faut que j'écrive un calcul. […]

C […] Je pense qu'au-delà de ça, l'idéal ce serait que les élèves comprennent pourquoi et quand on calcule, et quand on mesure, et à quoi ça sert de mesurer.

P1 Et quand ils ont le droit de faire un choix.

C Absolument, pas juste que ce soit un truc de contrat, parce que c'est écrit quelque part que je calcule

P2 oui, quel est l'intérêt ? C'est juste pour faire plaisir au prof, ils sont dans cet état d'esprit.

C C'est ça. Pour moi, ça empêche l'entrée dans la démonstration.

P2 Moi aussi.

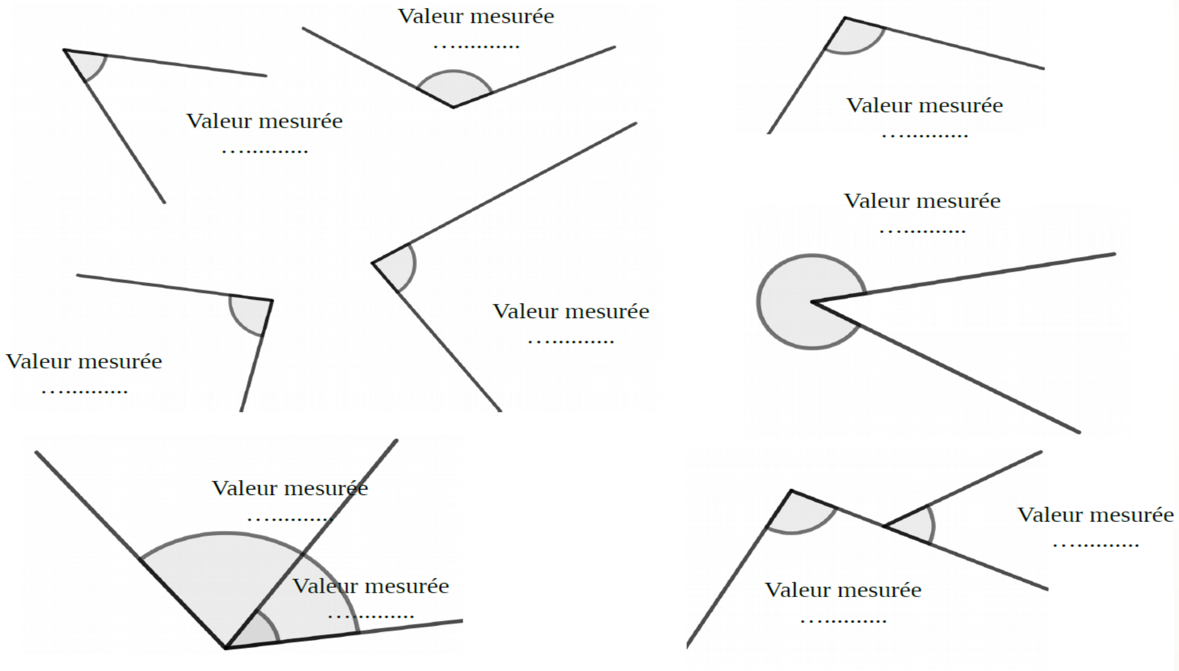
**6ème** **Approche 3 : Les angles – Mesurer en degrés – Utiliser un rapporteur**

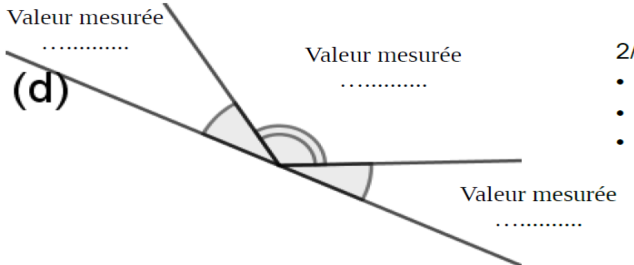
Travail en groupes

Le gabarit précédent n'est pas suffisant. Il existe une unité plus fine, qui correspond au partage d'un tour complet en 360 parties.
L'angle ''unité'' s'appelle le DEGRE. Voici un angle de 1 degré.

nent progressif

Vous disposez sur votre table de plusieurs instruments appelés RAPPORTEURS, qui permettent de mesurer des angles avec une précision de 1 degré.
1/ Mesurer les angles suivants en degrés en utilisant au moins trois des instruments proposés. Comparez vos résultats avec les autres membres du groupe. Si vous avez plus d'un degré d'écart, refaites les mesures et comparez vos méthodes.
En cas de désaccord persistant, appelez votre professeur ou un élève expert.




2/ Sur votre cahier :

- construire un angle $\widehat{xAy}$ qui mesure 75°.
- construire un angle $\widehat{tOz}$ qui mesure 137°.
- construire un angle $\widehat{sVp}$ qui mesure 208°.

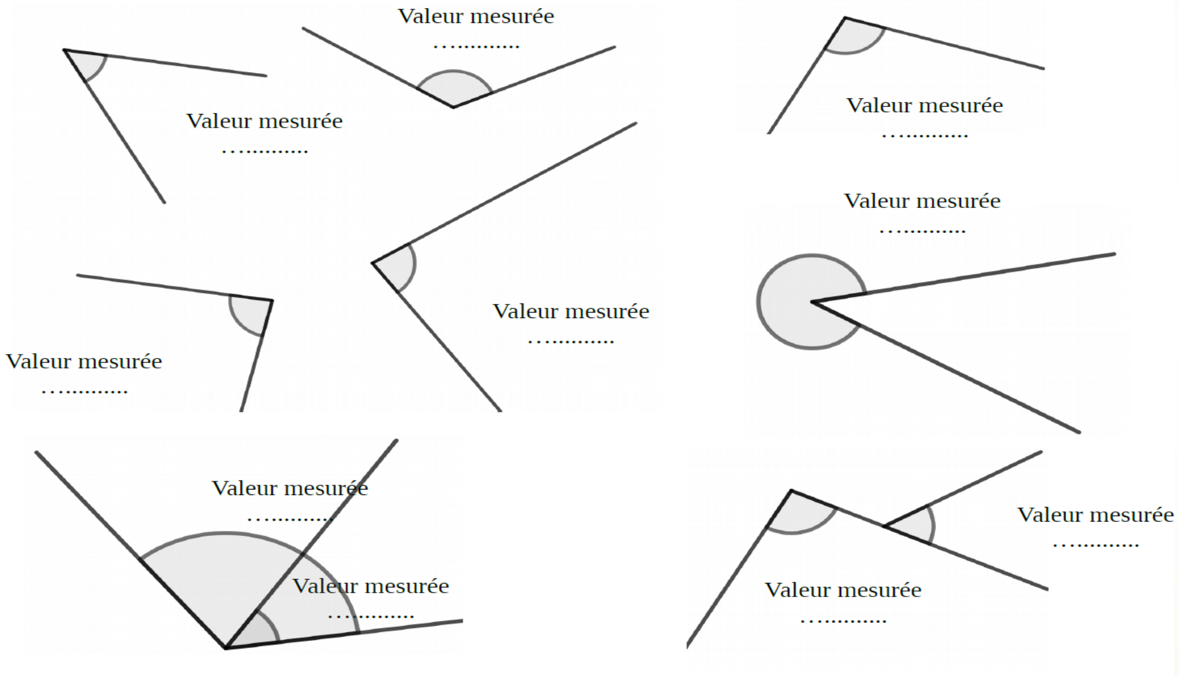
Faites contrôler vos constructions par un autre élève du groupe.

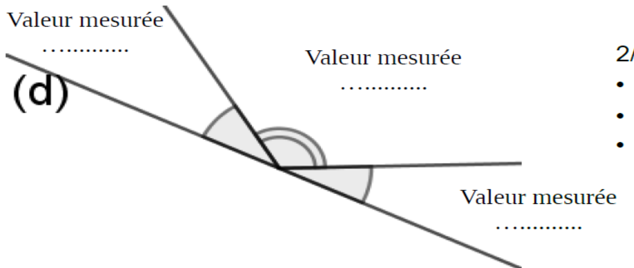
## Approche 3 : Les angles – Mesurer en degrés – Utiliser un rapporteur

Travail en groupes

Le gabarit précédent n'est pas suffisant. Il existe une unité plus fine, qui correspond au partage d'un tour complet en 360 parties.
L'angle ''unité'' s'appelle le DEGRE. Voici un angle de 1 degré.

Vous disposez sur votre table de plusieurs instruments appelés RAPPORTEURS, qui permettent de mesurer des angles avec une précision de 1 degré.
1/ Mesurer les angles suivants en degrés en utilisant au moins trois des instruments proposés.
Comparez vos résultats avec les autres membres du groupe. Si vous avez plus d'un degré d'écart, refaites les mesures et comparez vos méthodes.
En cas de désaccord persistant, appelez votre professeur ou un élève expert.

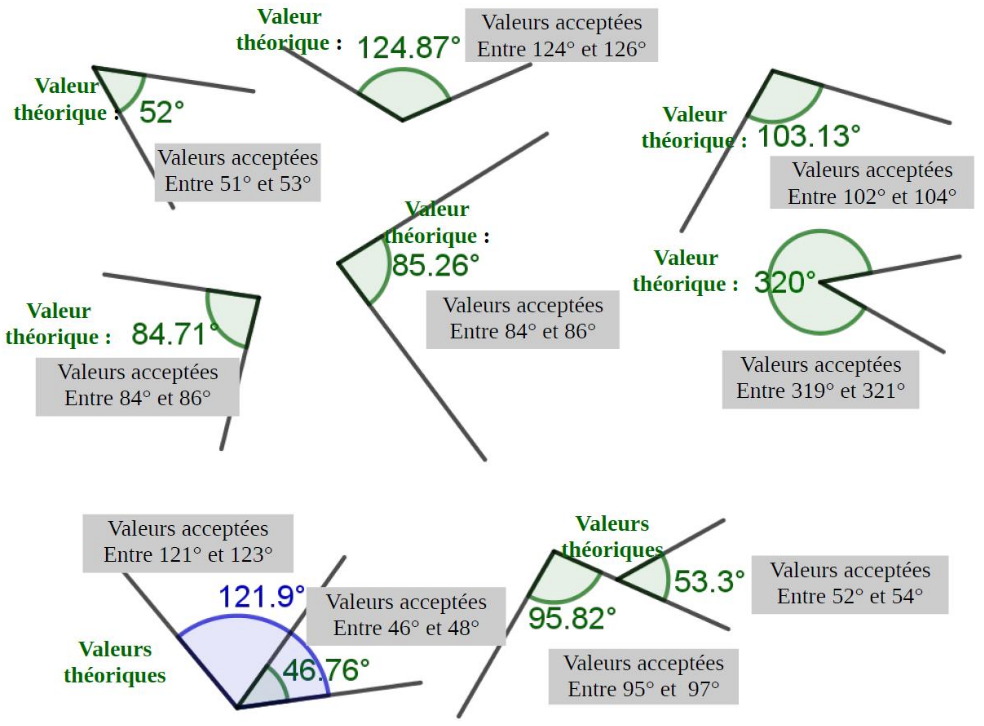



2/ Sur votre cahier :

- construire un angle $\widehat{xAy}$ qui mesure 75°.
- construire un angle $\widehat{tOz}$ qui mesure 137°.
- construire un angle $\widehat{sVp}$ qui mesure 208°.

Faites contrôler vos constructions par un autre élève du groupe.




<u>Bilan 1</u> :
1/ Les valeurs mesurées avec le rapporteur sont imprécises.
2/ Les valeurs théoriques ne sont pas forcément entières.
3/ Si l'écart à la valeur théorique est supérieur à 2 degrés, il faut revoir l'utilisation du rapporteur.
4/ ….

Côté PROF - Points de vigilance :

1) Sur le dernier cas de mesure demander : **D'après vous lorsque l'on fait la somme des trois mesures que devrait-on obtenir ?**

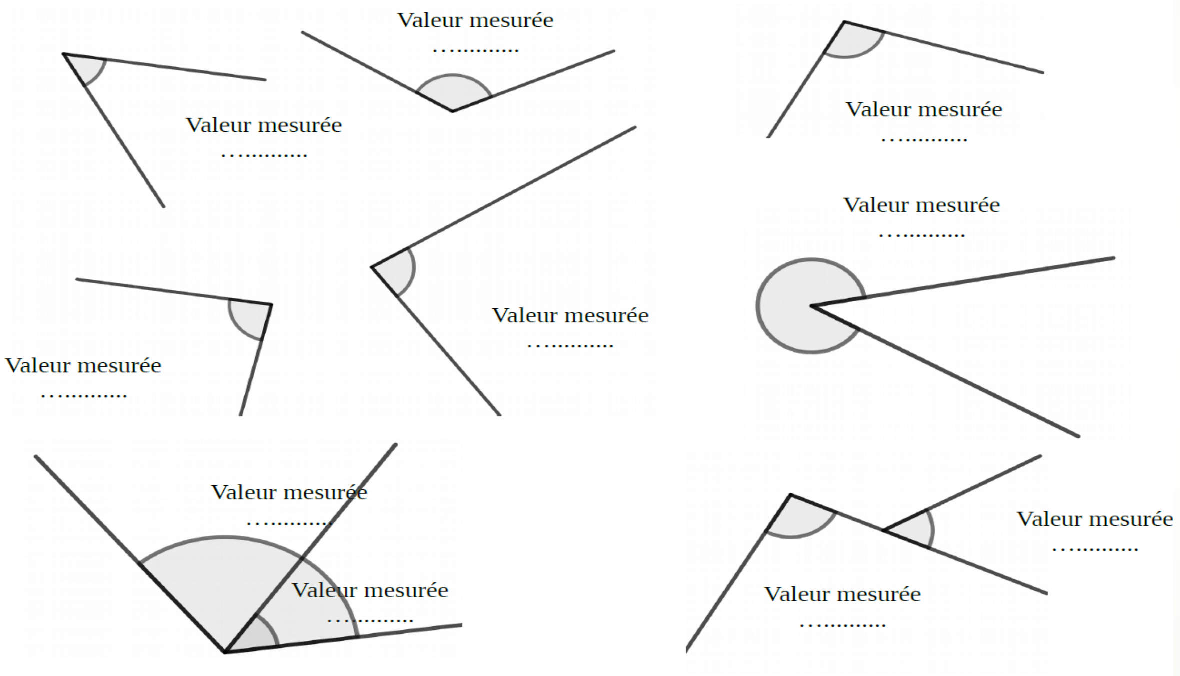
BILAN : Quand on juxtapose les trois angles on obtient un angle plat, quand on additionne les trois mesures on devrait obtenir une valeur proche de la **<u>valeur théorique</u>** 180°.
On ne trouve pas forcément exactement 180° car les mesures faites au rapporteur sont précises à plus ou moins 1 degré.

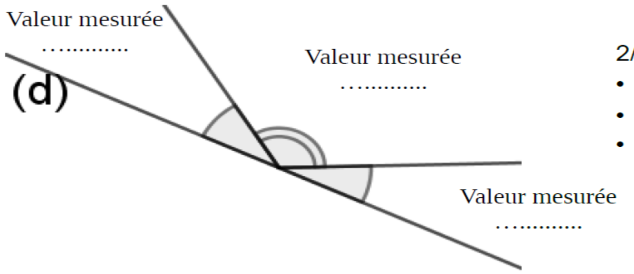
**6ème** **Approche 3 : Les angles – Mesurer en degrés – Utiliser un rapporteur**

Travail en groupes

Le gabarit précédent n'est pas suffisant. Il existe une unité plus fine, qui correspond au partage d'un tour complet en 360 parties.
L'angle ''unité'' s'appelle le DEGRE. Voici un angle de 1 degré.

Vous disposez sur votre table de plusieurs instruments appelés RAPPORTEURS, qui permettent de mesurer des angles avec une précision de 1 degré.
1/ Mesurer les angles suivants en degrés en utilisant au moins trois des instruments proposés.
Comparez vos résultats avec les autres membres du groupe. Si vous avez plus d'un degré d'écart, refaites les mesures et comparez vos méthodes.
En cas de désaccord persistant, appelez votre professeur ou un élève expert.




2/ Sur votre cahier :

- construire un angle $\widehat{xAy}$ qui mesure 75°.
- construire un angle $\widehat{tOz}$ qui mesure 137°.
- construire un angle $\widehat{sVp}$ qui mesure 208°.

Faites contrôler vos constructions par un autre élève du groupe.

**6ème** **Approche 3 : Les angles – Mesurer en degrés – Utiliser un rapporteur**

Travail en groupe

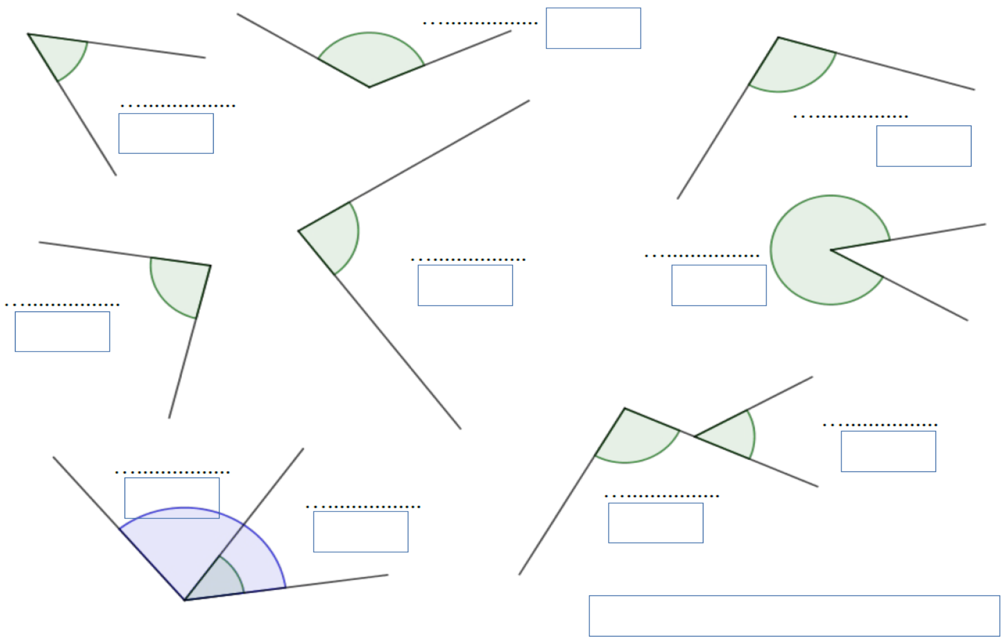
Le gabarit précédent n'est pas suffisant. Il existe une unité plus fine, qui correspond au partage d'un tour complet en 360 parties.
L'angle unité s'appelle le DEGRE. Voici un angle de 1 degré.

Vous disposez sur votre table de plusieurs instruments appelés RAPPORTEURS, qui permettent de mesurer des angles avec une précision de 1 degré.

**Partie I :**

- Mesurer les angles suivants en degrés en utilisant au moins trois des instruments proposés.
- **Vérifiez la cohérence** de la mesure trouvée, en comparant votre valeur avec celle d'un angle aigu ou obtus.
- Comparez vos résultats avec les autres membres du groupe. Si vous avez plus d'un degré d'écart, refaites les mesures et comparez vos méthodes.

En cas de désaccord persistant, appelez votre professeur ou un élève expert.



**Mon Bilan, je rédige ce que je retiens de cet exercice**

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

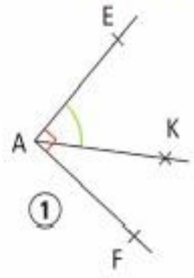
**Partie II :**

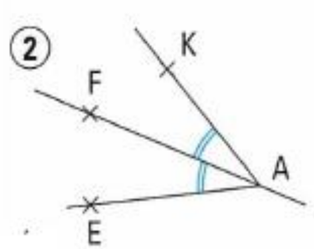
A faire sur votre cahier :
construire un angle qui mesure 75°.
construire un angle qui mesure 137,43°.
construire un angle qui mesure 208°.
Vérifiez la cohérence de vos constructions.
Faites contrôler vos constructions par un autre élève du groupe.

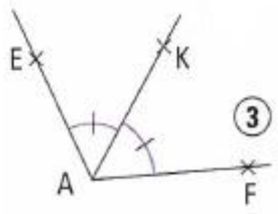
## Fiche d'exercices : Calculer un angle

**Exercice 1 :**

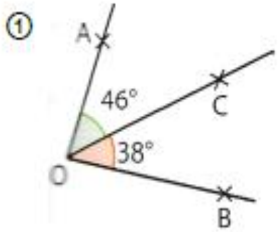
1. Pour chaque figure, l'angle $\widehat{EAK}$ mesure 56°. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans les trois figures.

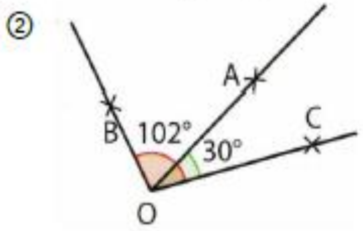


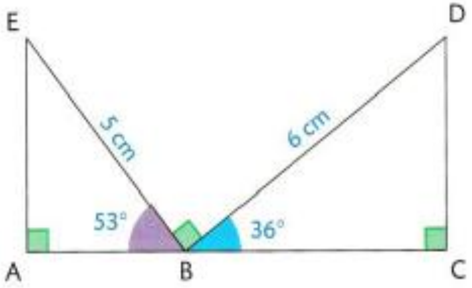




2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



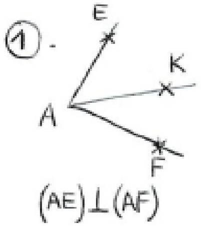

**Exercice 2 :** Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

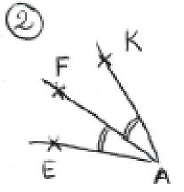


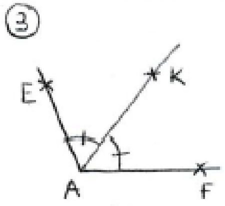

## Fiche d'exercices : Raisonner sur les mesures d'angle

**Exercice 1 :**

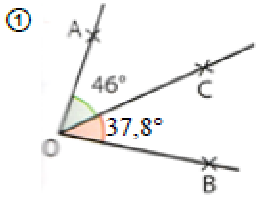
1. Pour les trois figures représentées sous forme de croquis, la valeur théorique de l'angle $\widehat{EAK}$ est 55°. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans chaque cas.

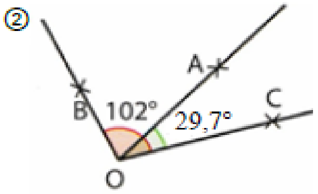


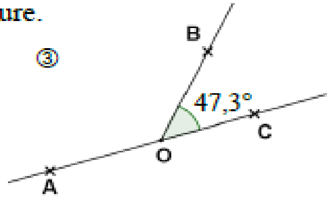




2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



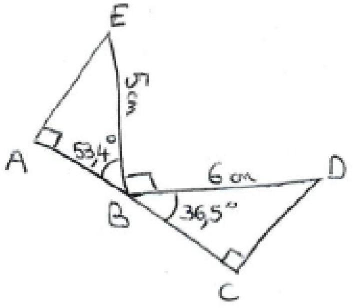




Les points A, O et C sont alignés

**Exercice 2 :**

Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier en détaillant votre raisonnement.




**BILAN individuel :** Ce que j'ai fait, ce que je retiens :

...........................................................................................................

...........................................................................................................

...........................................................................................................

**BILAN de la classe :**

...........................................................................................................

...........................................................................................................

...........................................................................................................

# Des effets dans les classes (Chesnais, 2021)

- Une évolution des tâches proposées aux élèves
- Une évolution des discours des élèves et de l'enseignant
  - Invention de termes
  - « figure idéale, imaginaire et parfaite »
- Une évolution de la place laissée aux élèves, notamment dans les bilans
- Des résultats dans les tests
  - Une évolution « exemplaire » : Ambre
    - Dans le pré-test : « Je n'ai pas compris pourquoi [le résultat de 9,3:4] est 2,325 puisque c'est 2,3 »
    - Dans le posttest : « non parce que la mesure de l'angle ABC est 89° et la mesure théorique d'un angle droit est de 90° ».
  - Sur une tâche de preuve (mobilisant la conservation des angles par la symétrie axiale)

| | Classes expé. | Classes témoins |
|---|---|---|
| Réponse attendue (avec mobilisation d'une propriété) | 74 % | 37 % |
| Utilisation des instruments | 11 % | 34 % |

# Des évolutions

- Une évolution des modes de travail collaboratif
  - Année 1 : Discussions préalables, préparation conjointe d'une séquence, mise en œuvre et discussion
  - Année 2 : discussion sur la progression, préparation conjointe de parties d'autres chapitres, initiatives des enseignantes + apports de situations
  - Année 3 : interactions plus ponctuelles, autonomie plus grande des enseignantes
- Élargissement des problématiques
  - À toute la géométrie
    - l'introduction des objets élémentaires de la géométrie en sixième
    - Avec apport de ressources (restaurations de figures)
  - À d'autres domaines (nombres)
- Le prolongement dans un autre dispositif sur l'enseignement de l'algèbre en fin de collège (avec Céline Constantin)

# Un travail en géométrie au sein d'un groupe IREM : la prise en charge des enjeux langagiers

Groupe IREM Didactique de Montpellier

Maëlis Béjaud (étudiante de M2 DDS)

# Point de départ

- Le groupe IREM Didactique de Montpellier
  - enseignants de collège, de lycée, formateurs, chercheurs
  - 1 réunion par mois environ
- Un travail précédent autour du repérage au collège et au lycée à partir d'un questionnement sur l'enseignement de la notion d'équation de droite en seconde (Cerclé et al., 2020, Chesnais et al., 2022)
  - L'identification de la notion de « distance » comme un savoir relativement transparent
  - L'identification de la nécessité de s'interroger sur les questions de langage
    - Les pratiques langagières mathématiques (verbales ou symboliques) comme **objet d'apprentissage**
    - L'activité langagière verbale comme **moyen d'apprentissage**

# La notion de cercle en 6ème

- La notion de cercle en sixième

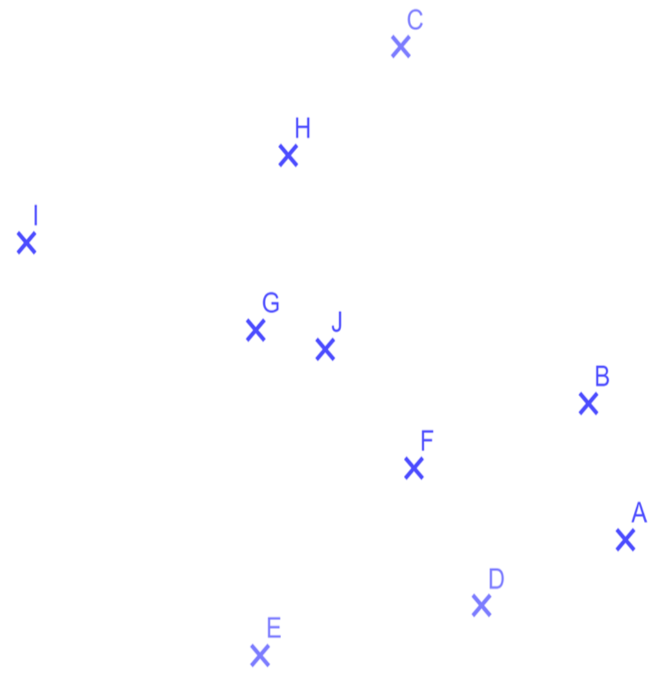
*Définition : Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O*

- Des difficultés conceptuelles …
  - Passer du cercle comme une figure qu'on trace au compas à voir une ligne comme un ensemble de points avec une propriété commune liée à leur distance au centre
- … **ET** langagières : des **formes linguistiques** et des **usages** (Bautier, 2007)
- Une **transparence** de ces enjeux pour les enseignants en particulier parce qu'on est à la transition école-collège (Chesnais et Mathé, 2018; Auger et Chesnais, 2021)

# Une tâche emblématique

Adaptée d'une tâche tirée des évaluations à l'entrée en 6$^{ème}$ dans les années 2000

**Exercice 3 :**




Dans le nuage de points ci-dessus, les points B, C, D et E sont situés sur un même cercle.

Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.

En utilisant ta **règle graduée**, trouve le centre de ce cercle puis réponds aux questions.

1. Explique pourquoi tu penses que le point que tu as trouvé est bien le centre du cercle.

Environ 1/3 des élèves réussissent en fin de 6ème, alors même que la définition fait partie des attendus de fin de CM1

Groupe IREM didactique, Chesnais et al. (2023)

# Le cercle chez Euclide

**Définition 15**

**Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé dans cette figure étant égales entre elles.**

- Ne parle pas de distances et encore moins de points mais de lignes égales entre elles
- Au collège : géométrie « à la Euclide » à laquelle on rajoute les mesures (avec les réels) (Robert, 1994) et les prémisses du « plan comme ensemble de points »

# La prise en charge langagière des relations : quand le diable se cache dans les « petits mots »

- Les maths : une histoire de relations (Bourbaki, Hilbert, Vergnaud…)
- Les relations logiques nécessitent des moyens linguistiques (syntaxiques) élaborés pour être manipulés

*Définition : Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O*

- La préposition « de » (et ses dérivés, « d' » ou « du » ou « des ») est le mot le plus fréquent dans les énoncés mathématiques, alors qu'il arrive en 3ème position dans les énoncés de français quotidien (Laborde, 1982)
- Avec des usages qui viennent de la langue française, mais qui sont plus ou moins usités et qui sont très complexes

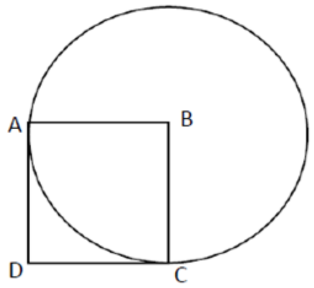
# Des difficultés liées aux formes linguistiques : les usages de la préposition « de » en mathématiques

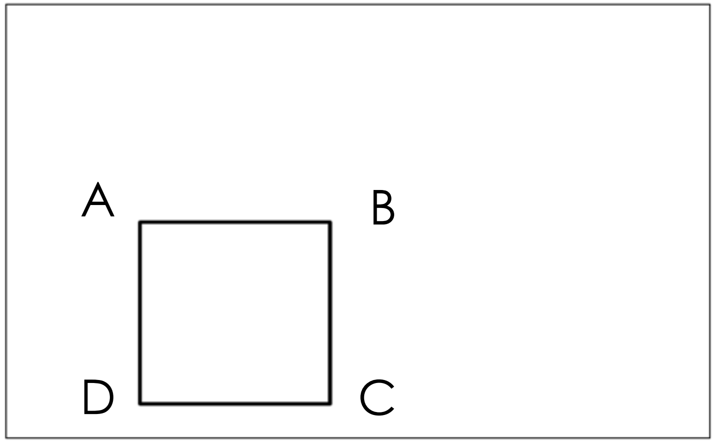
*Définition : Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O*

- Usage 1 : "le centre **de** ce (du) cercle"
  - idée d'appartenance comme dans "le chapeau de Pierre", très usité dans le langage courant.
- Usage 2 : "distance **de**… à …" : l'idée de point de départ
  - est utilisé aussi fréquemment dans le langage courant.
- Usage 3 : "le cercle **de** centre O" permet d'exprimer de façon concise une propriété de l'objet ; pourrait être remplacé par une proposition relative introduite par le pronom relatif "dont": "dont le centre est O";
  - s'emploie également dans le langage courant "le chapeau de couleur rouge", mais est peu usité.
  - On retrouve dans cette catégorie la locution "domaine de définition" (domaine dans lequel la fonction est définie).
- Usage 4 : "équation **de** droite" : il s'agit d'un usage 2, comme par exemple si l'on parle de l'équation d'une droite précise, mais avec ici une dimension générique quand on parle de la notion d'équation de droite.
  - En français courant, on pourrait de la même façon distinguer le pied d'une table du 'concept' "pied de table".
- Ces différents usages peuvent correspondre à des mots différents dans d'autres langues.

# Un diagnostic

**Exercice 1 :** On a commencé à reproduire la figure ci-dessous dans le cadre, en l'agrandissant. Termine la reproduction.




Une camarade est absente, elle n'a pas vu pas la figure de départ mais elle a le cadre avec le quadrilatère dessiné. Quelle consigne peux-tu lui donner, par téléphone, pour construire correctement le cercle ? Trouve deux formulations possibles.

Première formulation possible : ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

Autre formulation possible : ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………

- Auger et Chesnais (2021)

| % | EF | EP |
|---|---|---|
| Non traité | 37 | 26 |
| mentionnent deux informations (centre et rayon OU centre et point) | 59 | 30 |
| désignation du centre : « centre » / « mil(l)ieu » | 30/11 | 9/4 |
| Pointe du compas | 19 | 22 |

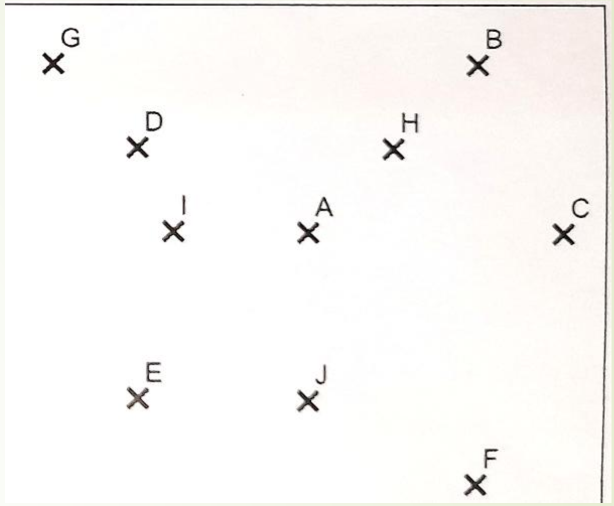
| Effectifs[12] | EF | EP |
|---|---|---|
| **de** centre B | 2 | 1 |
| **dont le** centre/millieu est (et) (le point) B | 3 | 1 |
| cercle **qui a pour** centre (/millieu) le point B | 1 | |
| B **sera/est** le centre du cercle | 3 | |
| **prend** B **pour** centre / prend pour centre B | 1 | 1 |
| pose la pointe/mine/pique du compas sur (le point) B | 5 | 5 |
| au centre du cercle place le point B | 1 | |

# La naturalisation des pratiques langagières mathématiques chez les experts

- « la communauté des mathématicien-ne-s a développé des pratiques discursives qui lui sont propres et qui s'écartent parfois des pratiques langagières non mathématiques. Ces pratiques reposent sur de nombreux implicites qui sont parfois naturalisés au point d'être difficilement identifiables par les locuteurs/trices, y compris (ou en particulier) par les « locuteurs/trices compétent-e-s ». (Barrier et Durand-Guerrier, actes CORFEM 2015)

# Un exercice sur la notion de distance

d) Trouve un point à la distance AC du point E.




**Un raisonnement : un pas déductif**
Le point D est à la distance AC du point E
⇔ Le segment [DE] a la même longueur que le segment [AC]
**Énoncé-tiers :** la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points

Plusieurs formulations « équivalentes »

- DE = AC
- La distance de D à E est égale à la distance de A à C
- Le point D est à la même distance du point E que A de C

Enjeux

- Segments-longueurs / points-distances
- Complexité sur le plan logique et langagier, notamment de la prise en charge de la relation entre 4 objets
- La question de la notation AC (Chevallard et Joshua, 1982)

# Les seuls qui produisent un énoncé correct…

- Parlent de longueurs de segments égales

Le segment [AC] a la meme longueur que le segment [ED]

Les segments [ED] et [AC] ont la même longueur.

- la longeur du segment [ED] est égale à la longeur du segment [AC].

1 Les point qui font la même distance que les point AC sont les point ED

2 Les point ED font la meme distance que AC.

3 Les Segment [ED] font la même longuer que [AD].

# Les autres…

le point D et la même distance que A ~~le point~~

le point a la longeur de AC c'est ED.

On a mesure [AC] et on a ~~on a~~ trouve que [D] que egale a [AC]

Le segment [ED] est à la même distance de [AD]

La distance AC du point E est D

la distance du segment [AC] fait la même
la même distance du segment [ED]

La reponse est ~~le~~ point D parce que ~~le~~ le point [ED] a la même longueur ~~de~~ que [AC].

Le segment ED à la même distance que le segment AC

Le point D et à la distance du point E
car quand on mesure au compas en voie que
le point D et pas la même languere du
point A mes la même longueur du point E

# La construction d’un triangle à partir de la définition du cercle

- **« Le raisonnement :** À partir du CM2, on amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner uniquement sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle. […] » *(programmes du cycle 3, 2015)*

- Qu’est-ce qui peut faire obstacle pour certains élèves qui ne pensent pas à mobiliser le compas / la définition du cercle ?

1) trace le segement [A B] de 4 cm

2) Trace le segement [B C] de 6 cm

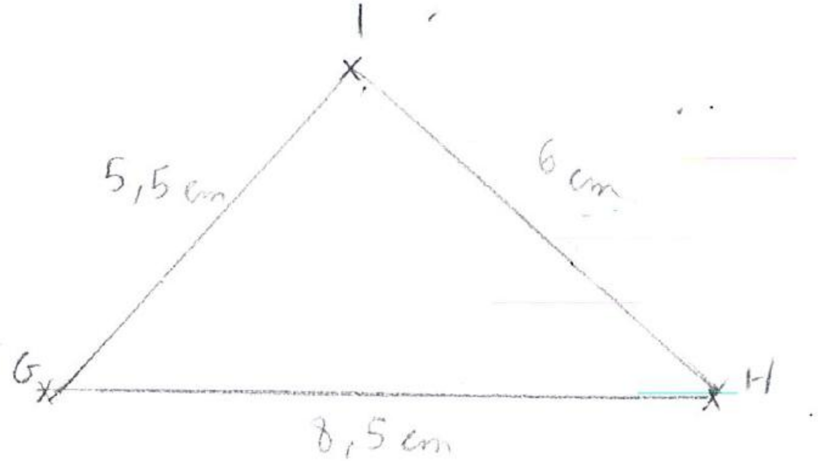
3) trace le segement [A C] de 5 cm

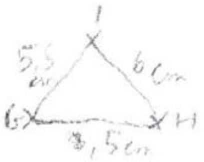
exercice 3 :

Tracer horizontalement [B C] = 6 cm
A l'aide d'un compas tracer vers le haut [A B] = 4 cm et [A C] = 5 cm.

**Exercice 4 :**

Construis ci-dessous un triangle GHI dont le côté [GH] mesure 8,5 cm, le côté [HI] mesure 6 cm, et le côté [GI] mesure 5,5 cm.



# Expérimentations dans des classes de 6ème (en REP+ et hors EP)

- Élaboration de tâches, incluant une part importante de productions langagières (orales et écrites) et prenant en charge les enjeux conceptuels (notamment distance)
- Mises en œuvre incluant une part d'activité des élèves importante (notamment langagière et en collectif), en appui sur les tâches et ce qu'y produisent les élèves et en articulant toutes les dimensions de l'activité


- Avec une introduction progressive des formes linguistiques expertes
  - Cercle de centre … et de rayon…
  - Distance de… à … ; distance entre … et …
  - Être à égale distance de
  - …

- Boucles itératives de conception, mise en œuvre, analyses + pré-tests et posttests

# Des supports

**Segment_construction_codage**

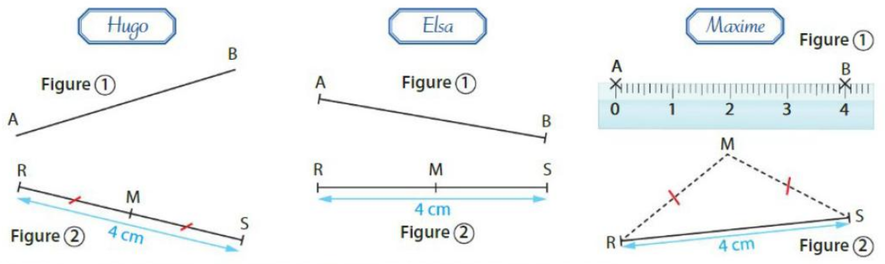
Le professeur a donné des consignes pour réaliser trois figures.

Figure ① : « Tracer un segment [AB] qui mesure 4 cm. »

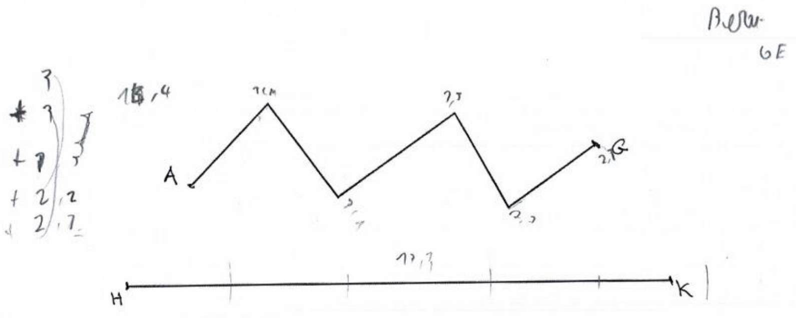
Figure ② : « Tracer un segment [RS] de longueur 4 cm puis placer le point M de ce segment qui est à égale distance des deux extrémités. »

Figure ③ : « Tracer un segment [EF] de 5,2 cm de longueur puis placer le milieu I de ce segment. »

Voici les productions de trois élèves pour les figures ① et ②.




1. Certaines productions comportent des erreurs ou des oublis. Lesquelles ?
2. Que signifient les codages ajoutés par Hugo et Maxime sur leur figure ② ?
3. Construire la figure ③.



1) En utilisant l'instrument de votre choix, comparer la longueur des deux lignes ci-dessus.

le ~~Poin~~ ligne A G et plus grande le ligne H K

2) Que peut-on dire de la distance entre le point A et le point G et la distance entre le point H et le point K ? Expliquer votre réponse.

~~le point A et G~~ la longeur est le point A G et 14,4 et la longueur de point H K et 11,3

3) Bilan : Que peut-on retenir de cette activité ?

on peut retenir que la longeur du point A G et plus gros que le point H K parce il fait des zigzag

**a.** Place trois points A, B, C tels que :

- A, B et C sont alignés.
- AB = 3 cm et AC = 5 cm.

**b.** Combien y a-t-il de possibilités ?

**c.** Calcule BC dans chacun des cas.

**d.** Écris une phrase pour caractériser précisément chaque position du point B.

**Partie n°1**

Sur le nuage de points ci-dessus,

a) Trouver la distance entre les points Z et C.

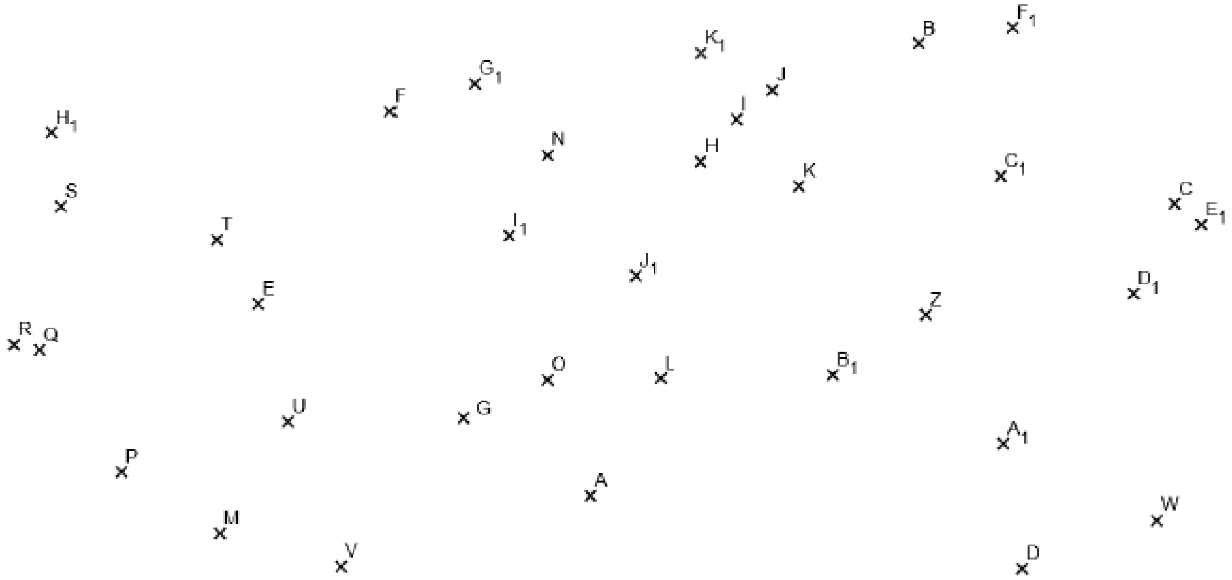
b) Repasser en rouge les points situés à la distance ZC du point Z.

c) Placer 10 points à la distance ZC du point Z (il n'est pas nécessaire de les nommer).

**Partie n°2**

Sans mesurer, trouver tous les points situés à la distance EM du point E. Expliquer votre démarche.

# Une tâche d’introduction à la définition du cercle




Partie n°1

Sur le nuage de points ci-dessus,

Trouver tous les points qui sont à 4 cm du point Z.

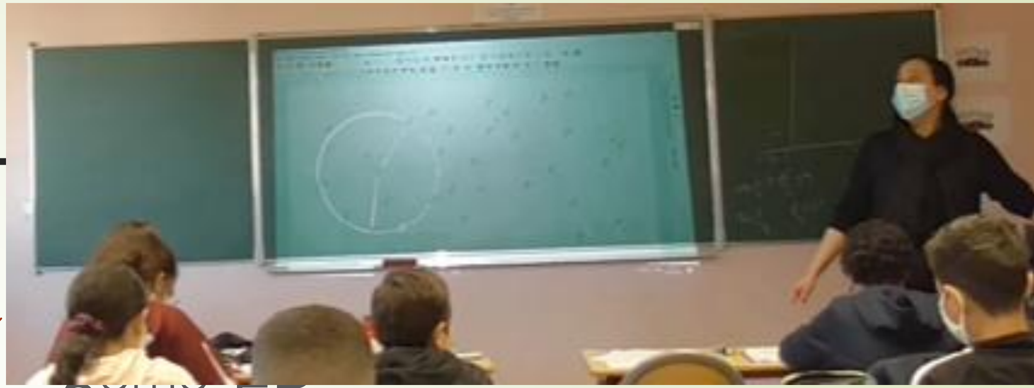
Partie n°2

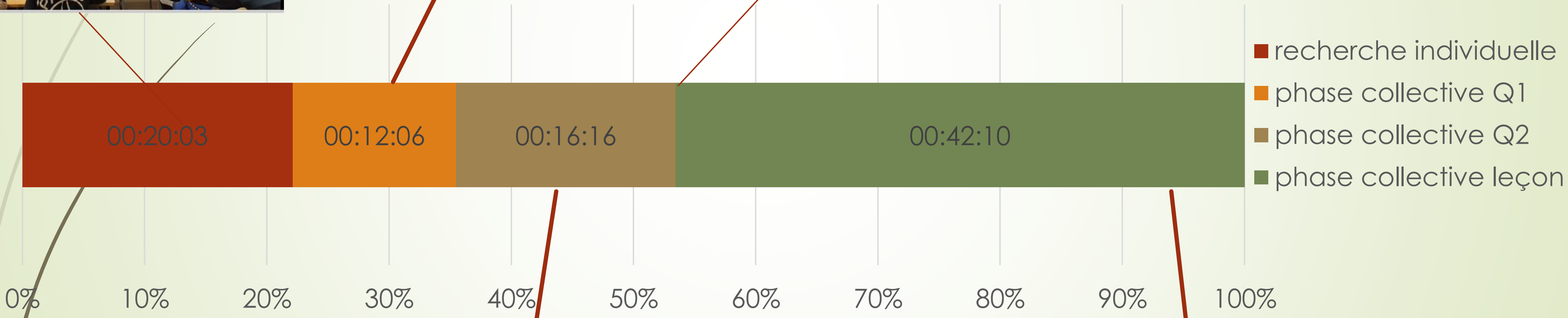
Sans mesurer, trouver tous les points situés à la distance EM du point E. Expliquer votre démarche.

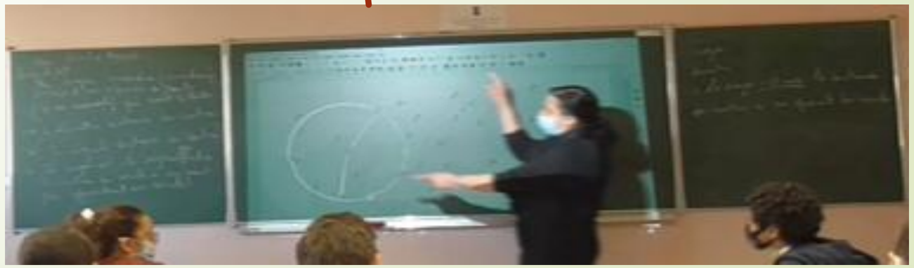
……………………………………………………………………………………………………

# La séance – durée 1

e cercle 2021 – 6ème EP





# Les étapes d'évolution des discours dans la formulation des procédures

**Considérations matérielles**
« écartement entre les branches du compas » la distance peut être « prise » et « transportée »

Matériel à mathématique / longueur à distance

Gestes

Objets mathématiques : points, distances

Distance comme relation

Avec des points
Entre des points
de … jusqu'à…
de … à…

Distance **de** (un point/une ligne) **à** un point

Relations entre distances

Ils ont tous la même distance
De E
Ils sont tous de la même distance
Ils sont tous à la même distance
Ils sont tous à une distance égale de E
Ils sont tous à une distance égale du centre

Processus de conceptualisation

Accompagné d'un processus de développement des discours

# Un moment clé de la mise en commun des procédures : un extrait

Anouar On utilise euh le compas

T Le compas oui

Anouar on met sur le point E, après on met l'autre bout sur le M et après on va tracer.

T pourquoi? parce que ? Anouar dit qu'on prend l'écartement EM et ça me permet d'avoir quoi ? […] oui Yasmine ?

Yasmine là en fait c'est la distance EM donc en fait quand on va tourner, et bé tous les points qui vont avoir cette distance, et bé ils vont être sur le cercle. […]

T Tu peux répéter ?

Yasmine quand, quand, là c'est la distance EM, donc, après, quand on va tourner, tous les points qui z'auront la même distance que EM, et be ils vont être sur le cercle.

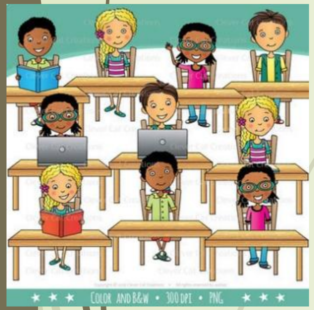
T elle vient de dire que cet écartement là me permet, autrement dit, de reporter la distance EM et quand on trace le cercle, tous les points qui sont sur le cercle, ils sont à- ?

[…]

Samuel en gros tous les points qui sont sur le cercle, sont des points qui sont à ég-, qui sont égale distance, enfin si on trace les segments, ils sont égal, c'est égal à EM.

# Comment vous définiriez un cercle?

50 tours de parole




Une ligne qu'on a tournée

Une line ronde

Tous les points au bord de la même distance

La même distance de la ligne arrondie au centre

Un ensemble de points

Une infinité de points

À la même distance

la même longueur entre le centre et les points

La même distance du centre

Qui ont la même distance du centre

Qui sont situé à la même ou à égale distance

du centre Du cercle

En utilisant le mot 'distance'

Une ligne faite de quoi ?

Comment sont les points?

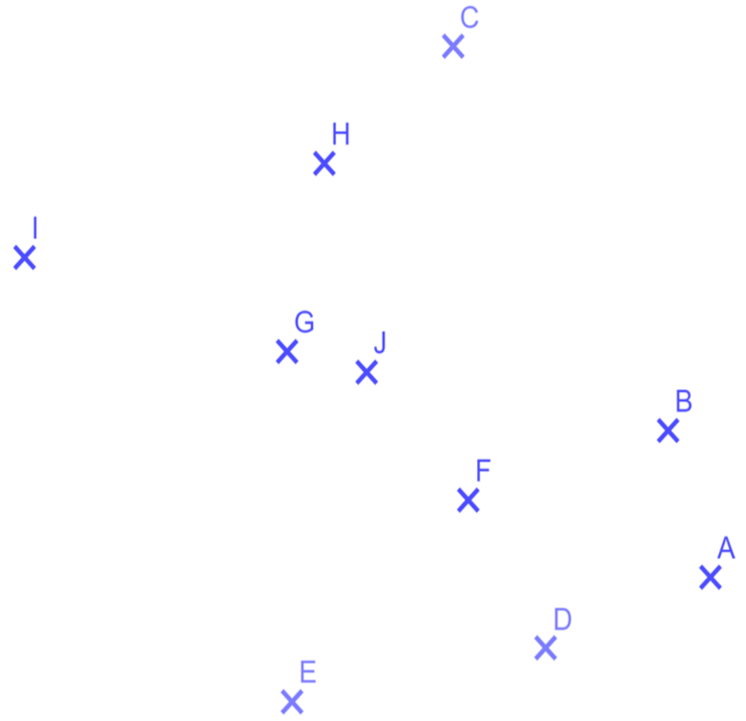
Qui ont ou qui sont?

À la même distance de quoi ?

Une ligne faite d'une infinité de points qui sont tous situés à la même distance du centre du cercle

# Des résultats

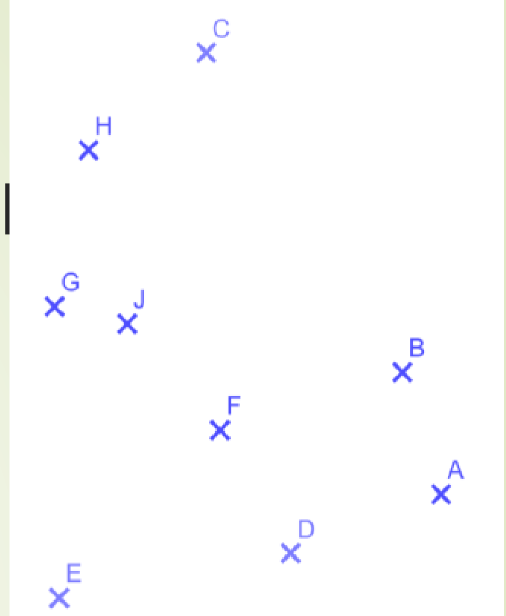
**Exercice 3 :**




Dans le nuage de points ci-dessus, les points B, C, D et E sont situés sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant ta **règle graduée**, trouve le centre de ce cercle puis réponds aux questions.

1. Explique pourquoi tu penses que le point que tu as trouvé est bien le centre du cercle.
2. Ylan dit que : « ça ne peut pas être le point H parce que la longueur de B n'est pas la même que la longueur de C ». Le professeur dit qu'Ylan a raison mais que c'est mal dit.
Ecris de façon correcte ce qu'a voulu dire Ylan :

# Etude qualitative des productio langagières sur la question 2




Ylan dit que : « ça ne peut pas être le point H parce que la longueur de B n'est pas la même que la longueur de C ». Le professeur dit qu'Ylan a raison mais que c'est mal dit.
Ecris de façon correcte ce qu'a voulu dire Ylan :

- Relation de non-égalité de relations de distances entre couples de points
  - Mais peut s'appuyer sur la non-égalité des longueurs des segments (rayons)
- Suppose de corriger
  - en parlant des longueurs des segments [HB] et [HC] :

*Ça ne peut pas être le point* H *car la longueur du segment* [HB] *n'est pas la même que la longueur du segment* [HC]

  - OU en parlant des distances entre B et H et entre C et H

*Ça ne peut pas être le point* H *car la distance de* B *à* H *n'est pas la même que la distance de* C *à* H

# Comparaison d'une classe expérimentale 6ème en EP et une classe témoin 6ème en EP

| effectifs | Relation complète | Relations incomplètes / dont EC | Réponses inadéquates | NT | Usage de « distance » |
|---|---|---|---|---|---|
| Classe expérimentale (18) | 10 | 8 / 5 | 0 | 0 | 11 |
| Classe témoin (21) | 4 | 9 / 8 | 2 | 6 | 1 |

- Relation complète

« Ça ne peut pas être le point H car la distance entre le point H et C est très proche contrèrement à la distance entre le point H et B. » (classe Exp.)

- Relation incomplète

« Ça ne peut pas être le point H car le point C n'est pas à la même distance que B » (classe Exp.)

- Relation incomplète avec erreur de catégorie

« Ça ne peut pas être le point H car le segment B et C n'est pas de même longueur » (classe témoin)

# Des résultats la première année

| | Établissements ordinaires | | Établissements REP+ | |
|---|---|---|---|---|
| | Classes contrôle | Classes expérimentales | Classes contrôle | Classes expérimentales |
| Proportion de succès | 49 % | **69 %** | 18 % | **50 %** |

Comparaison des productions langagières pour la question 2, en REP+

| | Classe contrôle (REP+) | Classe expérimentale (REP+) |
|---|---|---|
| Proportion de réponses | 71 % | 100 % |
| Relations complètes | 19 % | 52 % |
| Utilisation de « distance » | 4 % | 58 % |

# Des résultats la troisième année (Béjaud)

Définitions successives, le cas d'une élève Th : productions au pré-test, en séance 2, 4 et 5 et post-test

| | |
|---|---|
| Pré-test | Le cercle est une figure avec des **rayons** avec un **centre** au millieu |
| 2 | Un cercle est une figure qui a un **rayon**, un **centre** et un **diamètre**. (Le cercle est défini par un point.) |
| 4 | Un cercle a une infinité de points, il a un **centre**, un **rayon**, et un **diamètre**. Il a aussi une infinité de **rayon**, et de **diamètre**. […] |
| 5 | Un cercle est constitué de plusieurs points à une même distance d'un point appelé «le **centre** du cercle ». Cette distance est le **rayon** du cercle. […] |
| Post-test | Un cercle est constitué de plusieurs points a la même distance du **centre** du cercle. Cela se nomme un **rayon**. |

Dernière définition séquence et définition post-test

Les dernières définitions produites pendant la séquence (mi-mars)

Les définitions au post-test (fin mai)

Définition du cercle dans la leçon

En **gras** les différences avec la leçon; en *italique* les différences entre séquence et post-test

Un cercle est constitué de tous les points à une même distance d'un point appelé « centre du cercle ». Cette distance est le rayon du cercle.

| | | |
|---|---|---|
| Th | Un cercle est constitué de **plusieurs** points à une même distance d'un point appelé « **le** centre du cercle ». Cette distance est le rayon du cercle. | Un cercle est constitué de **plusieurs** points a ***la*** même distance ***du*** centre du cercle. ***Cela se nomme un*** rayon. |
| Sa | Un cercle est constituer de tous les points **située** à **la** même distance d'un point appeler « centre du cercle ». Cette distance est le rayon du cercle. | Un cercle est constitué de ***plusieurs*** points **située** a *une* même distance d'un point appeler « centre du cercle ». Cette distance est ***appeler*** "rayon du cercle". |
| Fe | Un cercle est constitué de tout les points **situés** à une même distance d'un point appelé « centre du cercle ». Cette distance est le rayon du cercle. | Un cercle est constitués de ***plusieurs*** points **situés** a une même distance d'un point appelé centre du cercle. Cette distance est ***appelé*** rayon du cercle. |
| As | Un cercle est constitué de **plusieurs** points **qui ont la** même distance **à** un **seul** point « le centre **», un cercle à infini de diamètres, à infini de rayons.** | Un cercle est constitué ***d'une infini*** de points **qui ont la** même distance ***et d'un* centre**. |

→ Hypothèse sur le degré de conceptualisation atteint

# Sur la tâche du nuage de points

Comparaison des productions pré-test / post-test

| | **Pre-test** | **Post-test** |
|---|---|---|
| As | Je l'est trouvé grâce à A-B-C-D-E parce-qu'il forme un demi cercle et si par exemple on prend un **compas** à 50% sa fonctionne. Donc j'ai rajouté un point de 4,5 cm car **l'écart** du E-G et de 4,5cm, je suppose que j'ai compris mais que c'est pas claire à expliqué. | Je pense que le point J est le centre du cercle car, les points B, C, D et E **ont tous la même distance** aux points J. Donc les points E, D, B et C sont les rayons du cercle de 4,2 cm de rayon. |
| Th | / | Je pense que le centre du cercle est J car **J est a la même distance des points B, C, D, E**. |
| Fe | / | Le centre de ce cercle sera le point J. car quand je **mesure** tout les points jusqu'au centre tout les points font 4,2. |
| Sa | J'ai trouver | Je pense que le centre est J car en **mesurant** du point J aux points demandés sa faisait **la même distance partout** |

# Une recherche sur un laboratoire de mathématiques

Thèse de Frédéric Descamps (en cours)

# Des conditions particulières

- Un lycée français à l'étranger
- Un enseignant avec une mission de formation pour animer le laboratoire
- Un soutien de la direction
- Une équipe de trois enseignants volontaires
- Un enseignant docteur en didactique des mathématiques

- 5 séances de travail collectif à propos de l'introduction des fonctions affines et linéaires en $3^{\text{ème}}$
- Des mises en œuvre dans les classes par chacun
- Des discussions à partir des mises en œuvre

- Inspiration double approche et Lesson Studies

# Un processus de réflexion

- Un échange sur les situations d'introduction élaborées précédemment par chacun
- Un questionnement sur le taux de variation qui amène à une interrogation sur le lien entre fonctions affines et proportionnalité
- Les différences de points de vue et le fait que le collectif semble dans une impasse amènent le docteur en DDM à étudier puis présenter au groupe des travaux de recherche
  - l'idée de fonctions affines comme rendant compte d'une vision dynamique de la covariation de deux grandeurs et le lien avec la proportionnalité des accroissements (Grau, 2022)
- Trois scénarios différents
  - Une reprise avec modification de la situation d'introduction faite précédemment
  - Un changement de situation d'introduction
  - Un réinvestissement de la même situation d'introduction mais les outils de la recherche lui permettent d'interpréter des stratégies d'élèves jusqu'alors obscures

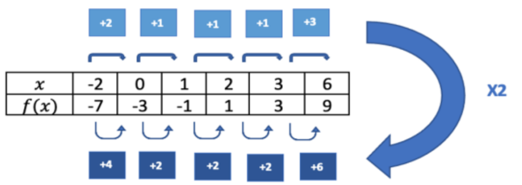
# Un enrichissement des scénarios et des mises en œuvre

- la mise en lien des représentations des fonctions affines dans différents registres via l'identification de la proportionnalité des accroissements

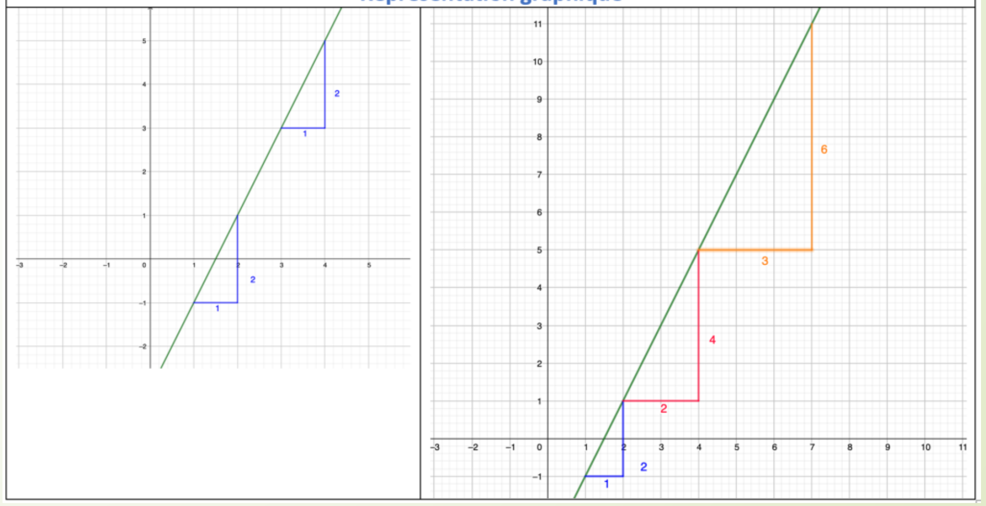
| Expression algébrique | |
|---|---|
| $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ | $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 2$ , pour tout $x_1$ et tout $x_2$ distincts |

**Tableau de valeurs**

| $x$ | -2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -7 | -3 | -1 | 1 | 3 | 9 |




**Représentation graphique**



# Conclusion

- Les laboratoires de mathématiques implantés dans des collèges ou lycées ont un potentiel pour « contribuer au **« développement professionnel en équipe des professeurs »** et **« accroître l'efficience de l'enseignement à destination des élèves »**, c'est-à-dire contribuer au **« développement professionnel sur le plan didactique »**
  - Partent des pratiques
  - Intègrent la dimension collective
- Mais des conditions pour que ce potentiel s'actualise…
  - Du temps long et une organisation qui intègre des relations entre mise en pratique et temps de discussion
  - La nécessité d'entrer dans un réel questionnement sur les pratiques et les apprentissages au regard des contenus
  - Un collectif qui partage un principe de base sur le fait que l'amélioration des apprentissages passe par un questionnement des choix d'enseignement, éclairé par une analyse des contenus
  - L'intégration d'apports de la recherche en didactique des mathématiques comme ressources

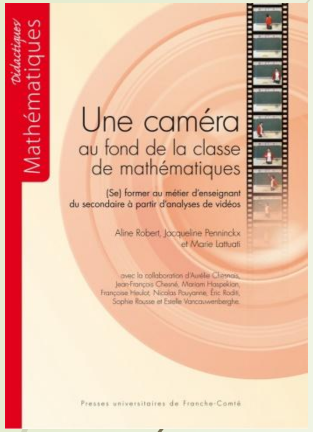
# Bibliographie


Articles d'interface issus des travaux du groupe IREM

- Chesnais, A., Destribats, A., Delamarre, A., Lahmouche, N., Lefort, J. et Bejaud, M. mieux faire apprendre tous les élèves en prenant en charge des objets transparents et des enjeux langagiers : un exemple avec la notion de distance, en lien avec le concept de cercle, *Revue Mathématiques Ecoles,* 240, 55-68.
- Cerclé, V. Chesnais, A., Daval, N., Destribats, A., Lahmouche, N., Lefaucheur, J. et Lefort, J. (2022). Le rapport entre distance et longueur : enjeu de vocabulaire ou enjeu de raisonnement ? p. 41-58. In *Actes de la CORFEM 2022* (Nantes, 9 et 10 juin 2022).
- Cerclé, V, Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Gosselin, E., Leberre, J. et Nyssen, L. (2021). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (deuxième partie), Petit x, 115, 29-63.
- Cerclé, V., Chesnais, A. et Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), Petit x, 113, pp. 59 à 88. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x4_1633083537539-pdf

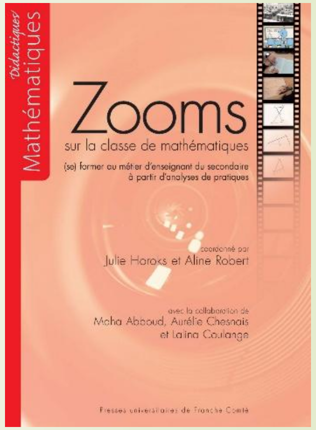
Articles et ouvrages de recherche

- Auger, N. & Chesnais, A. (2022). Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme. In P. Escudé, C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.). *Plurilinguisme et mathématiques*. Editions Lambert Lucas.
- Chesnais A. (2014). *Enseigner les mathématiques en ZEP. Recherche sur la géométrie en sixième*. 214 p. PUR : Rennes.
- Chesnais A. (2014). Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs. *Revue Française de Pédagogie, 188, 63-73.*
- Chesnais, A. (2020). L'apport d'un point de vue de didactique des mathématiques sur la question des inégalités scolaires. *Éducation & Didactique*, Presses Universitaires de Rennes, 14-1, pp.49-79. ⟨10.4000/educationdidactique.5378⟩. ⟨halshs-03441766⟩
- Chesnais, A. (2021). Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices. *ZDM Mathematics Education*, 53, 337–357 (2021).




- Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. PUFC.

- Horoks, J., Robert, A., (Coord.) & Abboud, M., Chesnais, A. et Coulange, L. (collab.) *Zooms sur la classe de mathématiques. (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de pratiques*




- Les colloques, actes et conférences en ligne de la COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (CORFEM)
- Petit x

Merci pour votre attention