ACADÉMIE
DE MONTPELLIER
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter l'exercice 1 (« G*raphes conviviaux* ») et l'exercice 2 (« L*e jeu du solitaire* »).

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter l'exercice 1 (« G*raphes conviviaux* ») et l'exercice 3 (« Somme des cubes des n premiers entiers naturels »).

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques selon sa catégorie, soit l'exercice 1 et l'exercice 2, soit l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximale.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

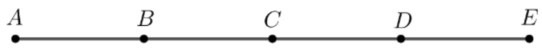
L'énoncé académique comporte 13 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

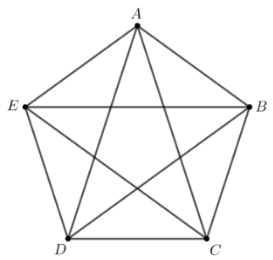
Graphes conviviaux

On considère un ensemble fini de points du plan, appelés **sommets**, dont certains sont reliés par des segments, appelés **arêtes**. Deux sommets reliés par une arête sont dits **voisins**. L'ensemble de ces sommets et de ces arêtes forme ce que l'on appelle un **graphe** $\mathcal{G}$.

Un graphe $\mathcal{G}$ est appelé **une rue** lorsque tous ses sommets ont exactement deux voisins, sauf deux sommets qui n'ont qu'un seul voisin et que l'on appelle **extrémités** de la rue (A et E dans le graphe ci-dessous).



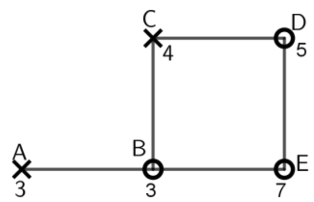
Un graphe $\mathcal{G}$ est appelé **un campement** lorsque tous ses sommets sont tous voisins entre eux.



Dans la suite, les graphes considérés possèdent deux types de sommets marqués comme **des ronds** ou **des croix**. Ainsi, pour simplifier nous parlerons de ronds ou de croix pour désigner ces sommets.
Une valeur réelle est associée à chaque sommet de $\mathcal{G}$, appelée **poids du sommet**.

Un graphe $\mathcal{G}$ est dit **convivial** lorsque la propriété suivante est vérifiée : **Le poids de chaque croix est égal à la moyenne des poids de ses sommets voisins.**

Exemple : On a représenté ci-dessous un graphe $\mathcal{G}$ (qui n'est ni une rue ni un campement) constitué de trois ronds B, D et E et deux croix A et C.

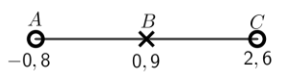


Ce graphe $\mathcal{G}$ est convivial. En effet :

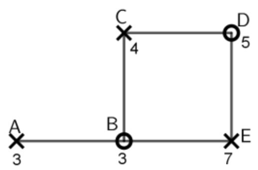
- la croix A a un unique voisin B, et 3 est bien égal à la moyenne du seul poids 3.
- la croix C a deux voisins B et D, et 4 est bien égal à la moyenne de 3 et 5 puisque $\frac{3+5}{2} = 4$.

Partie A. Quelques exemples.

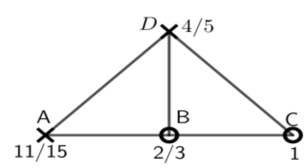
1. Parmi les graphes $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ représentés ci-dessous, lesquels sont conviviaux ? Justifier.



$\mathcal{G}_1$

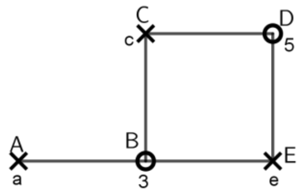


$\mathcal{G}_2$



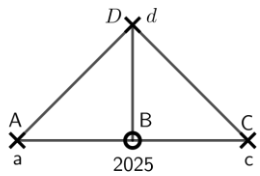
$\mathcal{G}_3$

2. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est constitué de cinq sommets dont seuls B et D sont ronds.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



Déterminer les poids respectifs a, c et e associés aux croix A, C et E. Justifier.

3. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est constitué de quatre sommets A, B, C et D. Le sommet B est l'unique rond et son poids est 2025. Les croix A, C et D ont pour poids respectifs a, c et d.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



a. Justifier que $a = c$.
b. En déduire les poids a, c et d.

Partie B. Un graphe $\mathcal{G}$ convivial avec un seul rond.

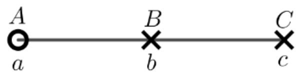
Après avoir étudié quelques exemples dans la partie A, le but de la partie B est d'étudier quelques propriétés **des rues et des campements avec un unique rond**.

1. Soient x, y et z trois nombres réels. Démontrer que si y est la moyenne de x et z, alors $y - x = z - y$.

2. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est une rue constituée de deux sommets A et B de poids respectifs a et b.
Le sommet A est l'unique rond.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.

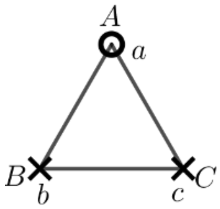
Que peut-on affirmer pour les poids a et b ? Justifier.

3. **a.** Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est une rue constituée de trois sommets A, B et C de poids respectifs a, b et c. Le sommet A est l'unique rond.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



Montrer que $a = b = c$.

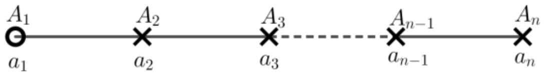
b. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est un campement constitué de trois sommets A, B et C de poids respectifs a, b et c. Le sommet A est l'unique rond.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



Que peut-on affirmer pour les poids a, b et c ? Justifier.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Dans les représentations ci-dessous, le graphe $\mathcal{G}$ est une rue constituée de n sommets A_1, A_2, …, A_n de poids respectifs a_1, a_2, …, a_n. Les extrémités de cette rue sont A_1 et A_n *et* cette rue a un unique rond.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.

a. Dans cette question, le sommet A_1 est l'unique rond. Son poids a_1 est fixé.



Exprimer les poids a_2, …, a_n associés respectivement aux croix A_2, …, A_n en fonction de a_1. Justifier.

b. Dans cette question, le sommet A_k est l'unique rond et n'est pas une extrémité. Son poids a_k est fixé.

Exprimer les poids associés aux croix en fonction de a_k. Justifier.

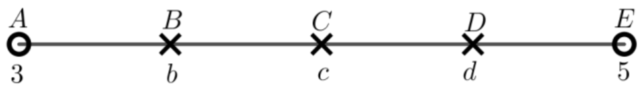
Partie C. Un graphe $\mathcal{G}$ convivial ayant exactement deux ronds.

Le but de la partie C est d'étudier quelques propriétés **des rues et des campements qui possèdent exactement deux ronds**.

1. a. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est une rue constituée de quatre sommets A, B, C et D de poids respectifs 7, b, c et 8. Les extrémités A et D sont les deux ronds.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.

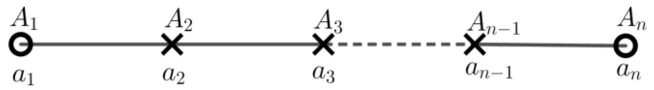
Déterminer les poids b et c associés respectivement aux croix B et C. Justifier.

b. Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est une rue constituée de cinq sommets A, B, C, D et E de poids respectifs 3, b, c, d et 5. Les extrémités A et E sont les deux ronds .
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



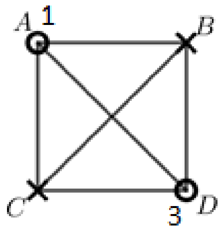
Déterminer les poids b, c et d associés respectivement aux croix B, C et D. Justifier.

c. Soit n un entier supérieur à 3.
Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est une rue constituée de n sommets A_1, A_2, …, A_n de poids respectifs a_1, a_2, …, a_n. Les extrémités A_1 et A_n sont les deux ronds. Leurs poids respectifs a_1 et a_n sont fixés.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



Exprimer les poids a_2, …, a_{n-1} associés aux croix A_2, …, A_{n-1} en fonction de a_1 et a_n. Justifier.

2. **a.** Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous est un campement constitué de quatre sommets A, B, C et D de poids respectifs 1, b, c et 3. Les sommets A et D sont les deux ronds.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.



Déterminer les poids b et c associés aux croix C et D. Justifier.

b. Soit n un entier supérieur à 3.
Le graphe $\mathcal{G}$ est un campement constitué de n sommets A_1, A_2, …, A_n de poids respectifs a_1, a_2, …, a_n.
Les deux ronds sont A_1 et A_n. Leurs poids respectifs a_1 et a_n sont fixés.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.
Exprimer les poids a_2, …, a_{n-1} associés aux croix A_2, …, A_{n-1} en fonction de a_1 et a_n. Justifier.

Partie D. Une propriété des graphes conviviaux.

Dans cette partie, le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas nécessairement une rue ou un campement mais il est **connexe**, ce qui signifie qu'il est toujours possible de passer d'un point à un autre par des arêtes.
Le graphe $\mathcal{G}$ est convivial.
On note k le plus grand poids associé à un rond de $\mathcal{G}$.
Montrer que les poids associés aux croix de $\mathcal{G}$ sont tous inférieurs ou égaux à k.

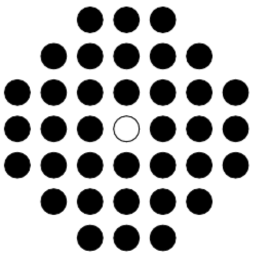
Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques)

Le jeu du solitaire

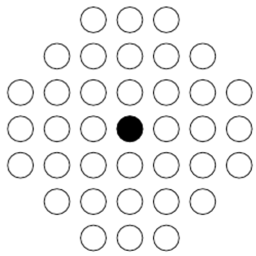
Dans la version française de ce jeu, le solitaire se joue seul sur un plateau octogonal contenant des emplacements pour des pions. Dans la situation de départ, tous les emplacements du plateau, sauf un, contiennent un pion et on cherche à atteindre la situation inverse, c'est-à-dire un plateau dont tous les emplacements, sauf un, sont vides.

Un cas particulier est la « situation miroir » : un plateau dont tous les emplacements sont vides sauf l'emplacement qui était vide au départ.

Exemple dans lequel ○ représente un emplacement vide et ● un emplacement contenant un pion :

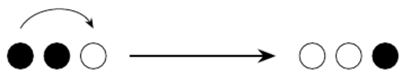


Situation de départ



Situation miroir

Le solitaire se joue en déplaçant les pions de la façon suivante : un pion peut sauter par-dessus un pion voisin et le pion déplacé doit arriver sur un emplacement vide. Le pion sauté est alors enlevé.
Ces déplacements peuvent se faire horizontalement ou verticalement, mais pas en diagonale.



Partie A

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble formé de 4 éléments distincts $\{0\,;1\,;p\,;q\}$.
On définit sur $\mathcal{E}$ les opérations d'addition $+$ et de multiplication $\times$ données par les tableaux ci-dessous.

$+$	0	1	p	q
0	0	1	p	q
1	1	0	q	p
p	p	q	0	1
q	q	p	1	0

$\times$	0	1	p	q
0	0	0	0	0
1	0	1	p	q
p	0	p	q	1
q	0	q	1	p

Par exemple :

- par lecture du premier tableau, on a $1+1=0$

$+$	0	1	p	q
0	0	1	p	q
1	1	0	q	p
p	p	q	0	1
q	q	p	1	0

- par lecture du deuxième tableau, on a $p \times q = 1$

$\times$	0	1	p	q
0	0	0	0	0
1	0	1	p	q
p	0	p	q	1
q	0	q	1	p

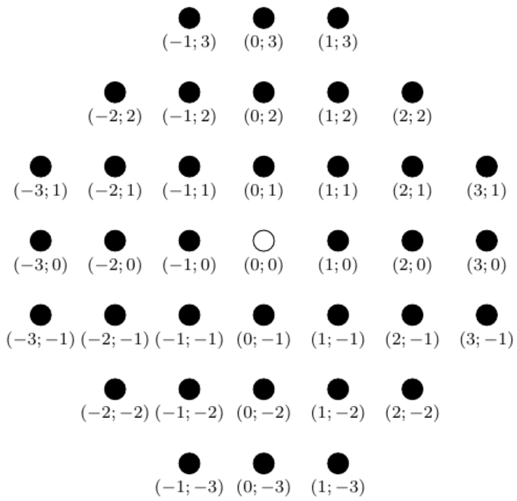
Les règles définissant les puissances et les quotients sont usuelles.
Les notations employées sont usuelles.
On écrit, en particulier, $p^0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$.
Les conventions de priorités de calculs sont les conventions usuelles.

1. Justifier les trois égalités suivantes : $p^2 = 1 + p$, $p^3 = 1$ et $p^{-1} = q$.

2. Pour chaque entier n tel que $-4 \leq n \leq 4$, calculer p^n et indiquer à quel élément de $\mathcal{E}$ il correspond.

Partie B

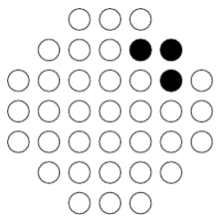
On munit le plateau de jeu d'un repère orthonormé, l'emplacement central étant l'origine du repère et l'emplacement de chaque pion ayant des coordonnées entières.



Repérage des emplacements des pions

On modélise une situation du jeu par l'ensemble S des coordonnées des emplacements où se trouve un pion et on pose :

$$A(S) = \sum_{(x;y)\in S} p^{x+y}$$

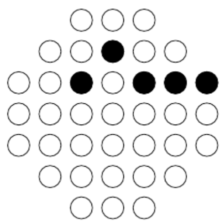


Par exemple, la situation ci-contre comporte 3 pions situés aux emplacements de coordonnées $(2; 1)$, $(2; 2)$ et $(1; 2)$.

On a alors : $S = \{(2;1)\,,(2;2)\,,(1;2)\}$ et

$$A(S) = \sum_{(x;y)\in S} p^{x+y} = p^{2+1} + p^{2+2} + p^{1+2}$$

1. Dans l'exemple précédent, justifier que $p^{2+1} + p^{2+2} + p^{1+2} = p$.



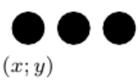
2. On donne ci-contre une nouvelle situation du jeu.

a. Donner l'ensemble S correspondant à cette nouvelle situation.

b. Justifier que pour cet ensemble, on a $A(S) = p$.

3. Représenter sur l'annexe 1, fournie à la fin du sujet, une situation ne comportant que cinq pions et dont l'ensemble S vérifie $A(S) = q$.

4. **a.** On considère une situation de jeu ne contenant que trois pions, qui sont alignés côte à côte horizontalement. On note $(x; y)$ les coordonnées de l'emplacement du pion situé le plus à gauche.

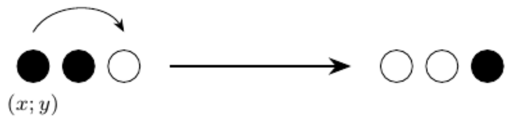


Donner l'ensemble S de cette situation en fonction de x et de y puis calculer et simplifier $A(S)$.

b. Calculer et simplifier $A(S)$ dans le cas d'une situation ne contenant que trois pions qui sont alignés côte à côte verticalement.

c. Utiliser les deux questions précédentes pour calculer rapidement $A(S)$ dans le cas où S modélise la situation où tout le plateau est rempli sauf l'emplacement central (on pourra compléter la figure de l'annexe 2, fournie à la fin du sujet, pour illustrer la démarche).

5. **a.** On considère une situation où il est possible d'effectuer un saut horizontal vers la droite et cette situation est modélisée par son ensemble S. Après avoir effectué ce saut horizontal, on obtient alors une nouvelle situation modélisée par son ensemble S'. On note $(x; y)$ les coordonnées de l'emplacement initial du pion ayant fait ce saut.



Comparer $A(S)$ et $A(S')$.

b. Faire de même dans le cas d'un saut horizontal vers la gauche, d'un saut vertical vers le haut puis d'un saut vertical vers le bas.

6. En partant d'une situation où le plateau est rempli sauf son emplacement central, est-il possible d'atteindre sa situation miroir ? Justifier.

Partie C

Le plateau est muni du même repère orthonormé que dans la partie *B*, et on introduit le nombre :

$$B(S) = \sum_{(x;y)\in S} p^{x-y}$$

Pour le plateau vide, on pose $A(S) = B(S) = 0$.

On admet que si S est un ensemble modélisant une situation avant un saut et S' celui modélisant la situation après ce saut, on a $B(S) = B(S')$.

1. Justifier que $A(S)$ et $B(S)$ ne prennent que des valeurs dans $\mathcal{E}$.

2. Montrer qu'il existe exactement 16 couples $(A(S)\ ;\ B(S))$ dont l'un des couples modélise la situation où le plateau est vide et 9 autres modélisent une situation où le plateau ne contient qu'un seul emplacement non vide.

3. **a.** Calculer $A(S)$ et $B(S)$ dans le cas où S modélise la situation où le plateau est plein.

b. On considère une situation de départ : le plateau est plein sauf un emplacement.
Écrire une fonction Python nommée AB

- dont les paramètres sont les coordonnées x et y de l'emplacement vide,
- affichant le mot "impossible" si cette situation ne permet pas d'obtenir une situation miroir et affichant "peut-être" sinon.

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement de spécialité mathématiques et TOUS les candidats de la voie technologique)

Somme des cubes des n premiers entiers naturels

Cet exercice porte sur une formule démontrée au 18e siècle par le mathématicien Carl Friedrich Gauss qui lie les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k$$

Notations :

$\sum_{k=1}^{k=n} k^3$ est la somme des cubes des entiers de 1 à n, c'est-à-dire $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

$\sum_{k=1}^{k=n} k$ est la somme des entiers de 1 à n, c'est-à-dire $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Exemples :

$\sum_{k=1}^{k=2} k^3 = 1^3 + 2^3$ et $\sum_{k=1}^{k=4} k = 1 + 2 + 3 + 4$

Partie A : Conjecture à l'aide d'un tableau de valeurs

1. Calculer $\sum_{k=1}^{k=3} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ ainsi que $\sum_{k=1}^{k=3} k = 1 + 2 + 3$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs des deux sommes pour n allant de 3 à 9.

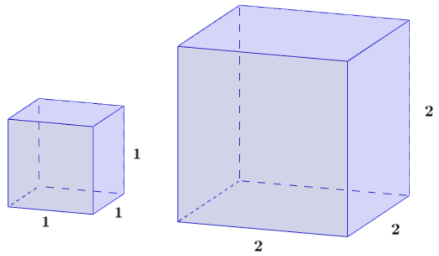
	$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 =$	$\sum_{k=1}^{k=n} k =$
Pour $n = 3$		
Pour $n = 4$		
Pour $n = 5$		
Pour $n = 6$		
Pour $n = 7$		
Pour $n = 8$		
Pour $n = 9$		

3. Conjecturer la formule qui lie les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k$$

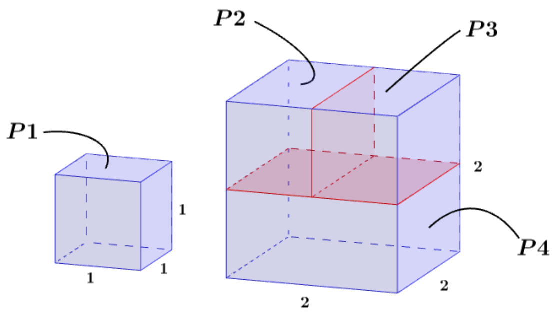
Partie B : Exemple géométrique illustrant une somme de cubes

1. On considère deux cubes dont les arêtes mesurent respectivement 1 et 2.

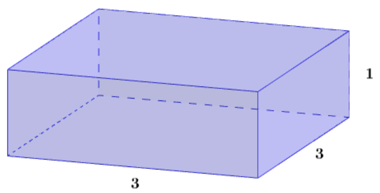


a. Calculer la somme des volumes des deux cubes.

b. On considère le cube de côté 1 comme une pièce notée $P1$ et on découpe le cube de côté 2 en trois pièces notées $P2$, $P3$ et $P4$.

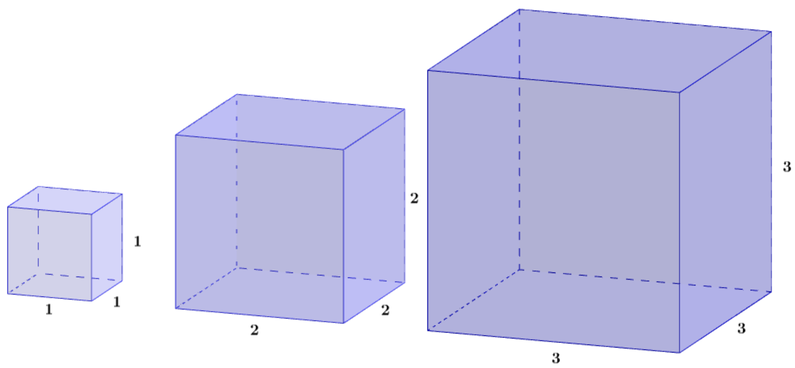


Les quatre pièces $P1$, $P2$, $P3$ et $P4$ assemblées permettent de former un pavé droit de dimensions $3 \times 3 \times 1$. Représenter ce pavé droit en faisant apparaître les quatre pièces $P1$, $P2$, $P3$ et $P4$ assemblées.



c. Quel cas particulier de la formule conjecturée dans la partie A ce découpage puis cet assemblage illustrent-ils ? Justifier.

2. On considère à présent trois cubes dont les côtés mesurent respectivement 1, 2 et 3.



Représenter un pavé droit de dimensions $6 \times 6 \times 1$ en assemblant le cube de côté 1 et toutes les pièces issues d'un découpage à déterminer des cubes de côté 2 et 3 afin d'illustrer l'égalité :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

Partie C : Algorithme de calcul de la somme des n premiers entiers positifs

1. On considère un algorithme en langage naturel et le programme associé en langage Python.

Algorithme en langage naturel	Programme en langage Python

$S \leftarrow 0$
Pour i allant de 1 à … faire
  $S \leftarrow S + \ldots$
Fin Pour
	$S = 0$
	for i in range (1,…) :
	  S = S + …
	print(S)

Recopier et compléter l'algorithme **ou** le programme en langage Python afin que la valeur affectée à S en fin d'exécution soit égale à la somme des 100 premiers entiers naturels, c'est-à-dire que :

$$S = \sum_{k=1}^{k=100} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$$

2. Déterminer la valeur affectée à S en fin d'exécution.

Partie D : Démonstration de la formule liant la somme des entiers de 1 à n et la somme de leurs cubes

Pour la suite, on admet la formule pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. a. Montrer que, pour tout nombre entier $k \geq 1$:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3 .$$

b. En déduire, en utilisant les valeurs adéquates de k, que $1^3 + 2^3 + 3^3 = \left(\frac{3\times(3+1)}{2}\right)^2$.

2. a. En s'appuyant sur la méthode de la question précédente, donner, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression en fonction de n de :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3.$$

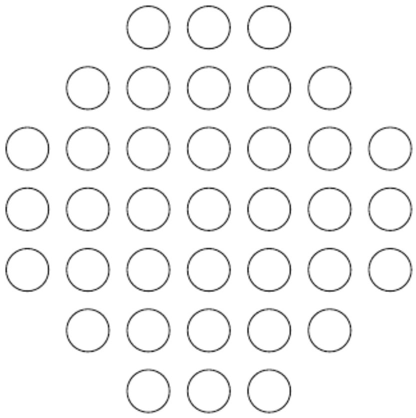
b. Conclure.

Annexes de l'exercice 2

(Candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques)

Annexe 1 (partie B question 3)

Figure à découper et à coller sur votre copie



Annexe 2 (partie B question 4.c.)

Figure à découper et à coller sur votre copie