



**ACADÉMIE
DE MONTPELLIER**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter l'exercice 1 (« *Les codes* ») et l'exercice 2 (« *La lemniscate de Bernoulli* »).
- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'ayant PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, STD2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter l'exercice 1 (« *Les codes* ») et l'exercice 3 (« *Les polygones entiers* »).

Chaque équipe composée de deux ou trois candidats traite ainsi deux exercices académiques selon sa catégorie, soit l'exercice 1 et l'exercice 2, soit l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour réaliser en fin de compte une excellente prestation.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé académique comporte 7 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)*Les codes*

Il existe différents types de codes dans l'industrie et le commerce.

Cet exercice explore l'écriture des codes-barres EAN 13 et des numéros des cartes bancaires.

Partie A. Les codes-barres EAN 13

Les codes-barres EAN 13 (*European Article Numbering* à 13 chiffres) sont imprimés sur des étiquettes et lus au moyen d'un scanner qui mesure la lumière réfléchiée.

Voici un exemple de code-barre EAN 13 :



Un code-barres EAN 13 s'écrit sous la forme de treize chiffres ABCD EFGH IJKL M.

- Les chiffres de rang impair sont : A, C, E, G, I, K et M.
- Les chiffres de rang pair sont : B, D, F, H, J et L.

Pour vérifier si le code-barres est correct, on ajoute les chiffres de rang impair et le triple des chiffres de rang pair. Le code est correct si la somme ainsi obtenue est divisible par 10.

Avec l'exemple illustré précédent, le code-barres s'écrit 5701 2639 0054 4. On a ici :

$$5 + 0 + 2 + 3 + 0 + 5 + 4 + 3 \times (7 + 1 + 6 + 9 + 0 + 4) = 100.$$

Cette somme est divisible par 10 donc le code est correct.

1. Le code-barres 9782 7117 8662 6 est-il correct ? Justifier.
2. Le code-barres 3497 6797 4183 7 est-il correct ? Justifier.
3. Considérons le code-barres suivant : 4013 3200 03Y9 7 où Y est un chiffre. Déterminer s'il existe une valeur de Y afin que ce code-barres soit correct.
4. Considérons le code-barres suivant : 4013 3200 3X49 7 où X est un chiffre. Déterminer s'il existe une valeur de X afin que ce code-barres soit correct.
5. Considérons le code-barres correct 3760 1472 XY08 7 où X et Y sont des chiffres. Le code-barres 3760 1472 YX08 7 (les chiffres X et Y ont été intervertis) peut-il être correct ? Si oui, déterminer toutes les valeurs possibles de X et Y.
6. Donner tous les couples possibles de deux chiffres qui se suivent dans l'écriture d'un code-barres correct tels que leur interversion fournisse un nouveau code-barres correct.
7. Écrire une fonction python codebarre(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M) qui détermine si le code-barres ABCD EFGH IJKL M est correct.

Partie B. Les cartes bancaires

Voici un exemple de carte bancaire :



La plupart des cartes bancaires présentent un numéro à 16 chiffres, groupés par 4 : ABCD EFGH IJKL MNOP.

Les chiffres de rang impair sont : A, C, E, G, I, K, M et O.

Les chiffres de rang pair sont : B, D, F, H, J, L, N et P.

Pour vérifier si un code à 16 chiffres est un numéro de carte bancaire correct, on utilise l'algorithme créé par l'ingénieur Hans Peter Luhn, donné ci-dessous.

Algorithme de Luhn	Exemple pour le code à 16 chiffres 1234 5678 7155 1176
<p>Première étape</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pour chaque chiffre de rang impair, on le multiplie par 2. • Si le résultat est plus grand que 9, on le remplace par la somme des deux chiffres du résultat obtenu. <p>Par exemple, pour le chiffre 4, on calcule $4 \times 2 = 8$ et donc le résultat est 8.</p> <p>Pour le chiffre 7, on calcule $7 \times 2 = 14$ et $1+4 = 5$, donc pour le chiffre 7, le résultat est 5.</p>	$1 \times 2 = 2$ $3 \times 2 = 6$ $5 \times 2 = 10$ et $1+0 = 1$ $7 \times 2 = 14$ et $1+4 = 5$ $7 \times 2 = 14$ et $1+4 = 5$ $5 \times 2 = 10$ et $1+0 = 1$ $1 \times 2 = 2$ $7 \times 2 = 14$ et $1+4 = 5$
<p>Seconde étape</p> <p>Ensuite, on effectue la somme des résultats calculés et des chiffres de rang pair.</p>	$2 + 6 + 1 + 5 + 5 + 1 + 2 + 5 = 27$ $2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 5 + 1 + 6 = 33$ $27 + 33 = 60$
<p>Décision</p> <p>Le code à 16 chiffres est un numéro de carte bancaire correct si la somme obtenue est divisible par 10.</p>	<p>La somme obtenue est 60 et c'est un multiple de 10. Ainsi, le code est un numéro de carte bancaire correct.</p>

1. Le code 5355 9028 9561 9531 est-il un numéro de carte bancaire correct ? Justifier.
2. Le code 4539 4512 0378 7356 est-il un numéro de carte bancaire correct ? Justifier.
3. Soit X un chiffre. Démontrer que si $X \geq 5$ alors la somme des chiffres de $2 \times X$ est $2 \times X - 9$.
4. On considère le code 4539 4512 0X38 7356, où X est un chiffre.
Effectuer les étapes de l'algorithme de Luhn et déterminer la seule valeur de X possible pour que ce code soit un numéro de carte bancaire correct.
5. Donner tous les couples possibles de deux chiffres qui se suivent dans l'écriture d'un numéro de carte bancaire correct tels que leur interversion fournisse un nouveau numéro de carte bancaire correct.
6. Écrire une fonction python qui détermine si un code à 16 chiffres est un numéro de carte bancaire correct.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques)*La lemniscate de Bernoulli*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ et on considère le point $K(-1; 0)$ (voir l'annexe page 7).
Cette annexe est à compléter avec précision au fil de l'exercice et doit être rendue avec la copie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier et de représenter la **lemniscate de Bernoulli notée \mathcal{L}** , définie comme l'ensemble des points M du plan tels que $MI^2 \times MK^2 = 1$.

1. **a.** Donner les distances OI et OK et en déduire que le point O appartient à la lemniscate \mathcal{L} .
b. Existe-t-il un autre point de l'axe des ordonnées appartenant à la lemniscate \mathcal{L} ? Justifier.
2. Soient x et y des nombres réels.
 - a.** Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{L}$ équivaut à $(x^2 + 1 + y^2 - 2x)(x^2 + 1 + y^2 + 2x) = 1$.
 - b.** Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{L}$ équivaut à $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = 2x^2 - x^4$.
 - c.** En déduire les coordonnées de tous les points de l'axe des abscisses appartenant à la lemniscate \mathcal{L} .
 - d.** On note A et B les points de l'axe des abscisses, différents du point O , appartenant à la lemniscate \mathcal{L} et tels que $x_A > x_B$. Placer les points A et B dans le repère de l'annexe.
3. Soient x et y des nombres réels.
 - a.** Montrer que la lemniscate \mathcal{L} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire que si $M(x, y) \in \mathcal{L}$ alors $M'(-x, y) \in \mathcal{L}$.
 - b.** Montrer que la lemniscate \mathcal{L} est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
 - c.** Montrer que la lemniscate \mathcal{L} est symétrique par rapport à l'origine du repère O .
4. On note P le quadrant supérieur droit du repère $(O; I, J)$, défini par l'ensemble des points du plan dont les abscisses et les ordonnées sont positives ou nulles. Justifier que « restreindre l'étude de la lemniscate \mathcal{L} au quadrant P permet ensuite de la tracer intégralement ».
5. Soient x et y des nombres réels positifs ou nuls.
 - a.** Montrer que $M(x; y) \in \mathcal{L}$ équivaut à $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.
 - b.** Montrer que si $M(x; y) \in \mathcal{L}$, alors $y \leq x$.
 - c.** Montrer que si $M(x; y) \in \mathcal{L}$, alors $x \leq \sqrt{2}$.
 - d.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que si $M(x; y) \in \mathcal{L}$, alors $y \leq \frac{1}{2}$.
 - e.** Que peut-on déduire graphiquement des questions **5.b.**, **5.c.** et **5.d.** sur la lemniscate \mathcal{L} ?
6. Soit k un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. On considère la droite (d_k) d'équation $y = kx$. Soient x et y des nombres réels positifs ou nuls.
 - a.** Montrer que si $M(x; y) \in \mathcal{L}$, alors $M \in (d_k)$ équivaut à $x = 0$ ou $x = \frac{\sqrt{2(1-k^2)}}{1+k^2}$.
 - b.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{L} et (d_k) situés dans le quadrant P si $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - c.** Déterminer, selon les valeurs de k , le nombre de points d'intersection de \mathcal{L} et (d_k) situés dans le quadrant P .
 - d.** Déterminer les arrondis à 0,01 près des abscisses et des ordonnées de ces points d'intersection pour chacune des valeurs de k suivantes :
 $k = 0,2$; $k = 0,3$; $k = 0,4$; $k = 0,5$; $k = 0,85$; $k = 0,9$; $k = 0,95$ et $k = 0,99$.
 - e.** Placer les points obtenus dans le repère de l'annexe.
7. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{L} et du cercle Γ de centre O et de rayon 1.
b. Placer les points obtenus dans le repère de l'annexe.
8. Tracer dans le repère de l'annexe l'allure de la lemniscate \mathcal{L} .

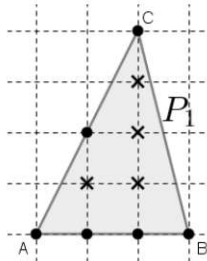
Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement de spécialité mathématiques et TOUS les candidats de la voie technologique)

Les polygones entiers

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans toutes les figures, les lignes en pointillés désignent les points du plan qui ont une abscisse ou une ordonnée entière. On donne les deux définitions ci-dessous :

- Un **point** du plan est dit **entier** si ses coordonnées sont entières.
- Un **polygone** est dit **entier** si tous ses sommets sont entiers.

Exemple 1. Le triangle P_1 ci-dessous est bien entier car ses sommets A, B et C ont des coordonnées entières.



On donne maintenant les notations suivantes pour un polygone P :

- \mathcal{A} l'aire du polygone P ,
- i le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de P ,
- b le nombre de points entiers situés sur le bord de P ,
- $\mathcal{F} = i + \frac{1}{2}b$.

Pour l'exemple 1 :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$i = 4$$

Les points sont notés par une croix.

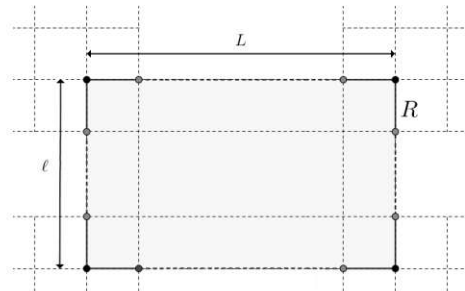
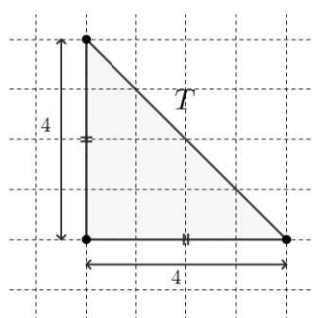
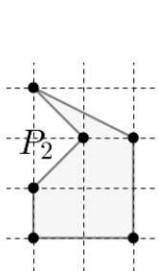
$$b = 6$$

Les points sont notés par un rond.

$$\mathcal{F} = 4 + \frac{1}{2} \times 6 = 7$$

Partie A. Exemples et conjecture

Dans cette partie, on considère les **trois polygones entiers** P_2 , T et R suivants :



Sur cette figure, certaines lignes en pointillés ne sont pas représentées.

1. Pour chacun de ces trois polygones entiers :

- calculer l'aire \mathcal{A} ,
- déterminer le nombre i de points entiers situés strictement à l'intérieur du polygone,
- déterminer le nombre b de points entiers sur le bord du polygone,
- déterminer le nombre $\mathcal{F} = i + \frac{1}{2}b$.

Pour le rectangle entier R , on exprimera \mathcal{A} , i , b et \mathcal{F} en fonction de la longueur L et de la largeur ℓ qui sont entières.

2. Quelle relation peut-on conjecturer entre l'aire \mathcal{A} et la valeur de \mathcal{F} ?

Partie B. Emploi du théorème de Pick

Théorème de Pick (admis) :

Dans tout polygone entier, on a la relation : $\mathcal{A} = i + \frac{1}{2}b - 1$ où \mathcal{A} , i et b ont été définis précédemment.

Rappel : Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

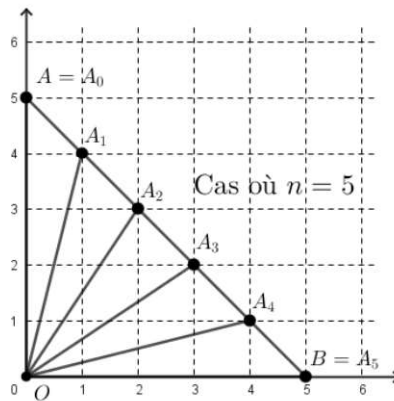
Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 4 ; on considère le triangle OAB où $O(0; 0)$, $A(0; n)$ et $B(n; 0)$. On découpe ce triangle OAB en n triangles : OA_0A_1 ; OA_1A_2 ; ... ; $OA_{n-1}A_n$ où les points A_i ont pour coordonnées $A_i(i; n - i)$ avec $0 \leq i \leq n$.

Les deux triangles OA_0A_1 et $OA_{n-1}A_n$ seront dit **externes** et les $n - 2$ autres triangles seront dits **internes**.

Dans cette partie, on s'intéresse aux nombres de points entiers situés strictement à l'intérieur des triangles internes.

Exemple 2. Ci-dessous figure le découpage du triangle OAB en 5 triangles (ici, on a donc $n = 5$).

Les deux triangles externes sont OA_0A_1 et OA_4A_5 , et les trois triangles internes sont OA_1A_2 , OA_2A_3 et OA_3A_4 .



1. Dans cette question, $n = 5$.

Le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est-il toujours le même ? Si oui, quel est ce nombre ?

2. a. Représenter soigneusement les découpages dans les cas $n = 7$, $n = 8$ et $n = 9$.

b. Pour chacune des trois affirmations suivantes, dire en justifiant, si elle est vraie, fautive ou si on ne peut pas conclure d'après les questions précédentes.

Affirmation 1 : Si n est pair, alors le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est toujours le même.

Affirmation 2 : Si n est impair, alors le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est toujours le même.

Affirmation 3 : Si n est un nombre premier, alors le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est toujours le même.

3. Dans cette question, $n = 11$.

a. En considérant la différence de deux aires, montrer que l'aire de chaque triangle interne est égale à $5,5$.

b. Montrer qu'il n'y a que trois points entiers sur le bord de chaque triangle interne.

c. En déduire, à l'aide du théorème de Pick, que le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est toujours le même, puis donner ce nombre.

4. Dans cette question, n désigne un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Démontrer que le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur de chaque triangle interne est toujours le même, puis exprimer ce nombre en fonction de n .

NOM des membres de l'équipe :

ANNEXE (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 2 _ La lemniscate de Bernoulli

