MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, <u>les énoncés et les copies sont ramassées</u> et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle <u>les énoncés et les copies sont également ramassées</u>.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2 heures).

- **Les candidats et candidates de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths ») traitent les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats et candidates**, c'est-à-dire de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et tous et toutes de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD,...) traitent les exercices nationaux 1 et 3.

Chaque candidat ou candidate traite ainsi deux exercices nationaux. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats et candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'elles ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième exercice (exercice 2 ou 3 selon votre catégorie) quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le ou la candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'elle a été amenée à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont admis selon la réglementation en vigueur. L'échange de ces instruments, hors calculatrice, peut être autorisé entre candidats sur accord explicite des surveillants, et dans le strict respect du silence.

<u>**Les énoncés doivent être rendus**</u> au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé national comporte 6 pages.

Exercice 1 (tous les candidats et candidates)

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. *Les feux de l'amour.* Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

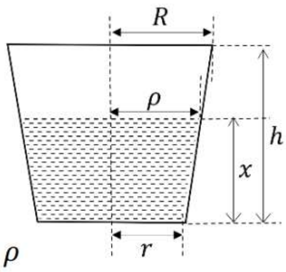
2. *Retour vers le futur.* Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).

a. Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?

b. Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. *Intelligence Administrative.* 4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

4. *Une moitié de seau pas si bête.* Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r, de grand rayon $R > r$ et de hauteur totale h.



a. Justifier que son volume total vaut

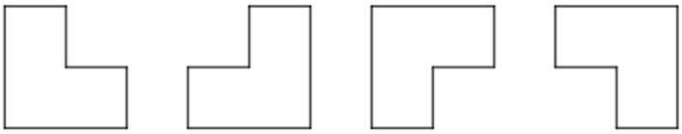
$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2)\,.$$

b. On remplit le seau jusqu'à la hauteur x, nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur x est un disque de rayon ρ. Déterminer ρ en fonction de r, R et h.

c. On suppose que $r = 1$, $R = 1{,}2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.

Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?

5. *Triominos.* Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :

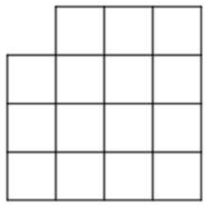


On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en ***b.*** *et* ***c.*** de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.

Soit n un entier naturel non nul.

a. Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?

b. On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).



c. Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.

6. *Sommes harmoniques.* Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

a. Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.

b. Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geq 1$.

c. On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9, de H_{10}..., H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?

d. On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geq 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n.

Exercice 2 (candidats et candidates de la voie générale suivant la « spé maths »)

Super premiers

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, on rappelle que ni 0 ni 1 ne sont premiers.

On rappelle aussi qu'il existe une infinité de nombres premiers, que l'on peut ensuite ordonner : le plus petit des nombres premiers est 2, on le note p_1 ; le suivant est 3, on le note p_2 et ainsi de suite. On notera ainsi p_n le n-ième nombre premier. On donne, à titre d'illustration, la liste ordonnée (de p_1 à p_{15}) des quinze premiers nombres premiers :

$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 11; p_6 = 13; p_7 = 17; p_8 = 19; p_9 = 23; p_{10} = 29,$

$p_{11} = 31; p_{12} = 37; p_{13} = 41; p_{14} = 43; p_{15} = 47.$

Pour tout entier naturel n, on note $\pi(n)$ ou plus simplement π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On signale que cette notation, $\pi(n)$ ou π_n , est usuelle dans ce contexte, mais n'a rien à voir avec le nombre π de la géométrie du cercle.

Étude de la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$

1. Justifier que $\pi_0 = 0$ et $\pi_5 = 3$. Combien valent π_1, π_2, π_6, π_{29}, π_{47} et π_{46}?

2. Démontrer que la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$ est croissante, c'est-à-dire que, pour tout naturel n, $\pi_n \leq \pi_{n+1}$.

3. Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$, alors $\pi_p < \pi_q$.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\pi_n \leq n$. Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $\pi_n = n$?

Suite des itérés de m par π

Pour m entier naturel, on appelle suite des itérés de m par π la suite de nombres formée par m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; etc. Ainsi, la suite des itérés de m par π est-elle $(m; \pi(m); \pi(\pi(m));\ \pi\left(\pi(\pi(m))\right), \ldots)$

5. Calculer les 7 premiers termes de la suite des itérés de m dans les cas particuliers où $m = 5$ puis où $m = 11$.

6. Démontrer que, de manière générale, la suite des itérées d'un entier naturel m est toujours décroissante, et devient nulle à partir d'un certain rang.

Entiers super premiers

Un entier naturel m tel que $m \geq 2$ est dit *super premier* si, dans la suite des itérés de m par π, tous les termes différents de 0 et de 1 sont des nombres premiers. En particulier, un super premier est premier.

7. Parmi les nombres 2, 3, 5, 7 et 11, lesquels sont super premiers ?

8. Soit n un entier naturel non nul. Supposons avoir construit les n plus petits entiers super premiers $s_1 < \cdots < s_n$. Montrer que le super premier suivant est le nombre premier p tel que $\pi(p) = s_n$.

9. Donner le cinquième plus petit nombre super premier.

Comportement asymptotique de la suite des super premiers.

Bien sûr, la suite ordonnée (s_n) des nombres super premiers tend vers $+\infty$, mais on souhaite montrer qu'elle tend très vite vers l'infini, au sens où le quotient $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ tend lui-même vers $+\infty$. Plus explicitement, nous fixons un entier naturel non nul M, et nous allons montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq M.$$

Pour ce faire, nous admettons le résultat suivant, qu'il est donc inutile de démontrer :

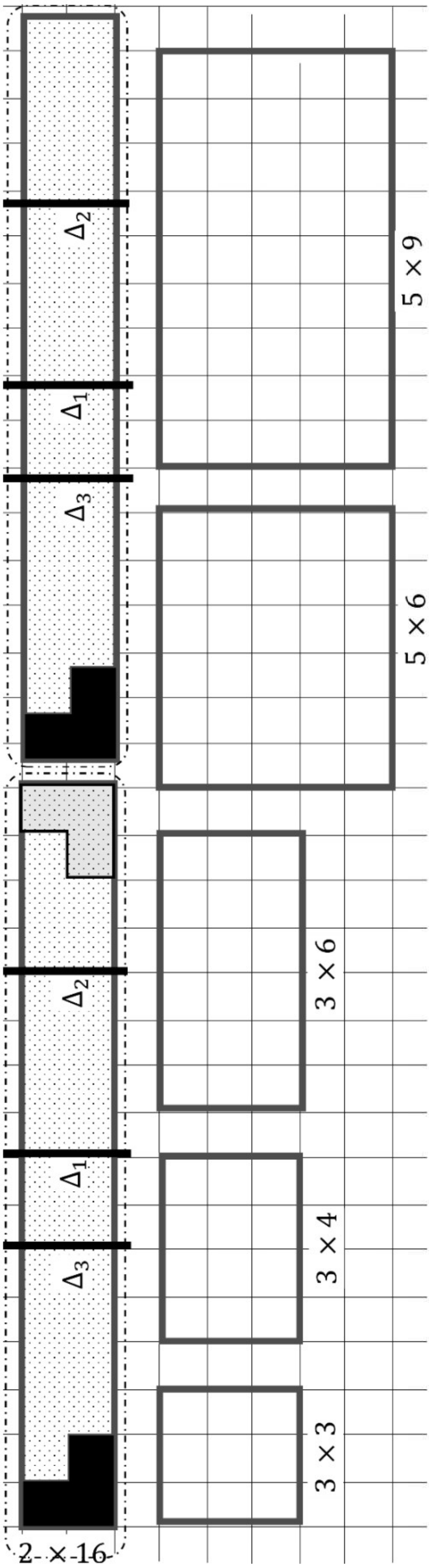
Pour tout entier naturel non nul N, on a $Q_N \leq 4^N$, où Q_N est le produit des nombres premiers compris (au sens large) entre 1 et N.

10. Montrer que pour tout entier $N \geq 4^{2(M+1)}$, on a : $4^{(M+1)\left(\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\right)} \leq 4^N$. On pourra considérer le produit des nombres premiers compris entre $\sqrt{N}$ (non compris) et N.

11. En déduire, dès lors, que : $\pi(N) \leq \frac{N}{M+1} + \sqrt{N}$.

12. Montrer enfin que pour N suffisamment grand, $\frac{N}{\pi(N)} \geq M$.

13. Conclure.



Exercice 3 (candidat/es de la voie générale NE suivant PAS la « spé maths » et TOUS/TES les candidat/es de la voie technologique)

Triominos (bis)

On revient ici sur les pavages par des triominos (cf. **5.** de l'exercice 1) de grilles (ici, complètes) $a \times b$ rectangulaires, puis carrées, sur lesquels on se pose des questions complémentaires.

Il est recommandé de dessiner sur sa copie les grilles au stylo, mais les triominos au crayon de papier. On pourra s'aider, comme brouillon, des grilles déjà tracées figurant en regard.

1. Représenter un pavage d'une grille dans le cas où $a = 3$ et $b = 4$.

2. ***a.*** On suppose que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ (on la dit alors « pavable »). Montrer que l'entier ab est divisible par 3.

b. Trouver la plus petite grille carrée pavable de taille $a \times a$.

c. La condition « ab est divisible par 3 » est-elle suffisante pour garantir qu'une grille de taille $a \times b$ soit pavable ?

3. On suppose que $a = 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b une grille de taille $2 \times b$ est-elle pavable ?

4. *Travaux manuels.* Sur l'un des bandeaux 2×16 ci-contre, on a symétrisé le triomino encré en noir par rapport à l'axe Δ_1, cela a donné le triomino teinté en clair à l'autre bout. On symétrise ce nouveau triomino par rapport à l'axe Δ_2, puis le nouveau-nouveau triomino par rapport à Δ_3.

a. Dessiner sur votre copie à l'échelle 1/2 le bandeau et les 4 triominos (dont celui d'origine) en présence.

b. Découper un bandeau (à l'échelle 1) de l'énoncé, remplacer chaque symétrie par un pliage en faisant en sorte que le triomino noir soit toujours visible. Enfin découper selon ses traits. On obtient une farandole de 8 triominos identiques. Pourquoi ? *Le deuxième bandeau en fournit aussi 8.*

5. On suppose dans cette question que $a = 5$. On s'aidera au besoin des 16 petits triominos qu'on disposera sur les grilles ad-hoc pour ses tests au brouillon.

a. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 6$.

b. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 9$.

c. On suppose b divisible par 3, $b \geq 6$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $5 \times b$.

6. On suppose que b est divisible par 3 et que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$. Montrer que l'on peut alors paver une grille de taille $(a + 2) \times b$.

7. On suppose que $a \geq 4$, et $b \geq 4$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ si, et seulement si, ab est divisible par 3. En déduire les grilles carrées que l'on peut paver.