# MATHEMATICA

# DINOSAURUS

Morceaux choisis

***Jean Marc DEWASME***

1 **Tyrannosaurus rex arithmetica**

**2 Brontosaurus analysis**

**3 Triceratops probabilitas**

**4 Diplodocus geometriae**

**5 Velociraptor recreationnes**

**6 Homo sapiens solutionnes**

* difficile ** pour public averti *** à ne pas mettre entre toutes les mains

$ Délirium très mince $$ histoire de fou

*Les lecteurs voudront bien excuser et corriger les erreurs, coquilles, et maladresses, et je les encourage à améliorer certains passages en considérant cet exemplaire comme une source d'idées et non comme un travail accompli.*

*JMD*

# I **<u>ARITHMETIQUE</u>**

**I.1** Déterminer les dimensions entières d'un rectangle dont le périmètre est égal à la surface.

---

**I.2** Trouver un nombre entre 1 et $1999\times10^{11}$ qui soit un carré, un cube et une puissance cinquième.

---

**I.3** Dans un système de numération de base x, on note p et q les symboles de x – 1 et x – 2
Ecrire 2p et $p^2$ dans ce système.
On suppose maintenant que $x = n^2 + 1$ ; écrire les carrés des nombres a = $\overline{nn}$ et b = $\overline{pp}$ .

---

**I.4 *** ***Droit d'aînesse***. Deux frères vendent un troupeau de moutons. Le prix de vente d'un mouton est, en euros, égal au nombre de moutons du troupeau. La vente terminée, ils sont en possession d'un nombre impair de billets de 10 euros et de monnaie inférieure à 10 euros. L'aîné prend un billet de plus et laisse la monnaie à son cadet. Combien devrait-il lui redonner pour que le partage soit équitable ?

---

-
**I.5** Déterminer un nombre entier entre $6\times10^4$ et $8\times10^4$ qui soit le produit de 3 nombres premiers dont l'un est la somme des deux autres.

---

-
**I.6** $ ***Date historique***. Lors de la guerre 14-18, en creusant une tranchée, on a découvert le cadavre d'un soldat espagnol armé d'une pertuisane. C'était le dernier jour du mois et le capitaine, qui avait de l'instruction, a multiplié la longueur en pieds de la pertuisane par son âge, le numéro du jour et la longueur en mètres de la tranchée pour trouver 3687901.
Pouvez-vous trouver l'âge du capitaine et la date exacte de cette découverte (jour, mois, année)

---

**I.7** n étant un nombre écrit en système décimal, on appelle p le nombre formé par les 2 derniers chiffres et q celui formé par les autres. On pose alors n' = q – 10p. Montrer que n est divisible par 7 (ou 13) si et seulement n' l'est.

---

**I.8** Soit n un nombre tel que la somme des tranches de 2 chiffres à partir de la droite soit 1998. Quelle est la somme alternée des chiffres de n sachant que cette somme est < 10.

---

**I.9 $ *** *Opérations codées.*** Reconstituez les opérations ci-dessous dans lesquelles les chiffres ont été remplacés par des lettres. (*Vous voudrez bien excuser ma faiblesse en allemand*)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| NEUF | VINGT | FORTY | DREI | CUATRO |
| + UN | +CINQ | + TEN | +VIER | × 5 |
| + UN | +CINQ | + TEN | ---------- | -------------- |
| --------- | ----------- | ----------- | NEUN | VEINTE |
| ONZE | TRENTE | SIXTY | | |

---

**I.10** On choisit 15 nombres entiers entre 1 et 2001 de telle manière que ces nombres soient premiers entre eux 2 à 2. Montrer que parmi ces 15 nombres il y a un nombre premier.

---

**I.11 $** Le professeur MIROT est invité à l'anniversaire d'Anita qu'il ne connaît pas. Les amies d'Anita ont préparé 2 gâteaux. Sur le premier, l'âge d'Anita est représenté en système décimal par des bougies vertes pour les dizaines et des bougies blanches pour les unités. Sur le second, l'âge est en système à base 12 avec des bougies roses et blanches (les blanches représentent toujours les unités). Mais le professeur MIROT est daltonien ! Il voit 9 bougies identiques sur le premier gâteau et 10 sur le second. Pouvez-vous aider le professeur et lui dire l'âge d'Anita.

------------------------------------------

**I.12** ***Le trésor des pirates.*** L'équipage d'un bateau pirate comprend 22 marins et un cuisinier chinois. Ils découvrent un coffre rempli de pièces d'or. Les pirates décident de se partager le trésor en parts égales et de laisser au cuisinier les 17 pièces restantes. Mais au cours d'une dispute 5 pirates sont tués ; les autres refont le partage, ce qui ne laisse plus que 10 pièces au chinois. Le lendemain le bateau fait naufrage et sur une île se retrouvent 9 pirates le cuisinier et le trésor. Après un nouveau partage le chinois, qui n'a plus que 4 pièces d'or, décide que cela a assez duré et empoisonne les 9 rescapés. Quel est le nombre minimum de pièces d'or en sa possession ?

------------------------------------------

**I.13** * ***Pourquoi tant de n ?*** Montrer que pour tout nombre entier n il existe un multiple de n qui ne s'écrit en système décimal qu'avec des 0 et des 1. Montrer que si n est impair non multiple de 5 il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

------------------------------------------

**I.14** ***Période***. Quel est le plus petit entier n dont l'inverse a un développement décimal formé de 5 chiffres distincts se reproduisant périodiquement ?

------------------------------------------

**I.15** * On dit qu'un nombre n est heureux s'il existe 2 entiers a et b tels que n = a+b et que n divise ab. Montrer que n est heureux sauf s'il est produit de facteurs premiers distincts.

------------------------------------------

**I.16** ***** proposé par J.P Vaucelle.*** Un jour Jean Dupont rencontra Albert Einstein et lui dit « Votre renommée est telle que je connais votre âge mais vous ignorez le mien. Mon âge et le votre n'ont pas de diviseur commun mais le votre pourrait être l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seraient mon âge et celui de mon fils » Après un moment de réflexion Einstein déclara qu'il ne pouvait trouver ces âges. Alors Dupont ajouta « Mon fils est majeur » Aussitôt Einstein trouva les réponses. Quels étaient ce jour là les âges de Dupont et de son fils ? (*Einstein est mort à 76 ans*)

------------------------------------------

**I.17** Montrer que si a,b,c sont sans diviseur commun et que $b^2 = ac + a^2$ alors a est un carré.

------------------------------------------

**I.18 $$ ***** ***Sophisme.*** On peut trouver des nombres de n chiffres dont le carré se termine par ces mêmes n chiffres (*donc avec n infini on a un nombre égal à son carré ?*)

------------------------------------------

**I.19** ** Soit $n = 4444^{4444}$ Montrer que $n < 10^{16500}$ . Si on appelle a la somme des chiffres de n, b la somme des chiffres de a et c la somme des chiffres de b, déterminer c.

------------------------------------------

**I.20** * ***En pensant à J.L Blanchemanche***. Monsieur Septembre a eu 9 filles dont les âges sont régulièrement espacés du même nombre d'années. Cette année il s'aperçoit que le carré de son âge est égal à la somme des carrés des âges de ses filles. Quel âge a-t-il ? (*il n'est pas centenaire*)

------------------------------------------

**I.21***** ***Binaire, vous avez dit binaire !*** On numérote des objets de 1 à n et on décide d'en éliminer un sur deux en renvoyant au fur et à mesure les non éliminés en queue de liste. Quel sera le dernier ?

------------------------------------------

**I.22** ** ***Indicateur d'Euler.*** Soit un entier n >1, on appelle $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n et $E_n$ l'ensemble de ces entiers.

Montrer que la somme des éléments de $E_n$ est $\frac{1}{2}$ n $\varphi(n)$.

Montrer que si p est un nombre premier $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$
Soient 4 nombres m,n,u, v tels que um+vn = 1 , montrer que si x a pour reste $\alpha$ dans la division par m et pour reste $\beta$ dans la division par n , $x=vn\alpha+um\beta+\lambda mn$. En déduire qu'il existe une seule solution $x_0$ entre 0 et mn
Montrer que $\alpha \wedge m= 1$ et $\beta \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\beta mu+\alpha nv) \wedge mn= 1 \Leftrightarrow x_0 \wedge mn = 1$ ce qui permet de dire que la correspondance entre $(\alpha,\beta)$ et $x_0$ est une bijection de $E_m \times E_n$ sur $E_{mn}$ . En déduire que si m et n sont premiers entre eux $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Calculer alors la somme des entiers inférieurs à 2000 et premiers avec 2000.

------------------------------------------

**I.23** ***Polygones.*** Soit n un entier > 2 et k un entier, 0 < k < n On pose $z_k = e^{2ik\pi/n}$
On appelle $E_k$ l'ensemble des puissances de $z_k$ et $P_k$ le polygone obtenu en joignant les images de $1, z_k , z_k^2 ,...., z_k^n$ . Montrer que si $k\wedge n = d$, alors $E_k = E_d$ et contient $\frac{n}{d}$ éléments distincts. En déduire le nombre de polygones de n côtés.

------------------------------------------

**I.24** ** On se propose de déterminer des nombres de 2 chiffres identiques dont le carré s'écrit avec 4 chiffres identiques, c'est à dire vérifiant $(\overline{bb})^2 = \overline{aaaa}$
Montrer qu'il n'y a pas de solution en système décimal. Vérifier qu'en base 41, b=29 est une solution (on donnera la valeur correspondante de a).

Montrer qu'en base x le problème s'écrit : $b^2(x+1) = a(x^2+1)$ et en déduire qu'il n'y a pas de solution si x est pair .

On choisit x impair (x=2p+1 ). Montrer qu'alors a=p+1 et $b^2=2p^2+2p+1$
On considère l'hypothèse supplémentaire b=a+1. Montrer qu'il y a une solution unique.
En revenant au cas général, on cherche p tel que $p^2+(p+1)^2=b^2$ (E). Déterminer les solutions pour p entre 0 et 20.
On pose alors $u_0=0$, $u_1=3$ et $u_{n+2}=2+6u_{n+1}-u_n$ et de même $v_0=1$,$v_1=5$ et $v_{n+2}=6v_{n+1}-v_n$ . Vérifier que $p=u_3$ et $b=v_3$ sont encore des solutions de (E).
Vérifier que $u_n = \frac{1-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$

et $v_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n$.

Vérifier alors que pour tout n, $p=u_n$ et $b=v_n$ sont solutions de (E).

------------------------------------------

**I.25** ** On se propose de déterminer les entiers a et b non nuls vérifiant : $(a - b)^2 = a + b$
(on supposera a<b) . On pose $d = a\wedge b$ , a=dx , b=dy .Montrer que $(x+y)\wedge(x - y)$ est égal à 1 ou 2
On suppose que $(x+y)\wedge(x - y) = 1$ . Montrer que x+y=d et que d est impair. En posant d=2n+1 déterminer a et b en fonction de n .
On suppose que $(x+y)\wedge(x - y) = 2$ . Déterminer a et b en fonction de d .
Déterminer a et b sachant que le reste de la division de a par b est 137.

------------------------------------------

**I.26** ** Soit une base x >2 et 2 entiers a, b tels que 0<a<b<x . On note dans cette base $n=\overline{ab}$ et $n'=\overline{ba}$ et on dit que n est un codiviseur en base x si n' est un multiple de n , c'est a dire si il existe k tel que n'=kn
On suppose connus x, a, b. Montrer que nécessairement $2 \le k \le x-1$. On pose donc r=b-ak
Montrer que $1 \le r \le k-1$ , bk=rx+a , rx=$(k^2-1)$a+kr
Réciproquement si on suppose connus a, k, r , r étant un diviseur de a$(k^2-1)$ , montrer que les formules précédentes permettent de déterminer un codiviseur .
Montrer que k+1 et x+1 ne peuvent être premiers entre eux et qu'en particulier il n'y a pas de codiviseur si x+1 est premier. Etablir que $2k \le x$ . et que x est au moins égal à 5.
On choisit x tel que x+1 = uv et r = k-1 . Montrer qu'il y a au moins un codiviseur. Déterminer tous les codiviseurs de la base 17.

-----------------------------------------

**I.27** *** ***Etude de*** $a\mathbb{N}+b\mathbb{N}$ ***, a et b dans*** $\mathbb{N}$.
Soient 2 entiers a et b strictement supérieurs à 1 ( on supposera a>b ) On appelle E l'ensemble des entiers x non nuls qui peuvent s'écrire x = am + bn, m et n dans $\mathbb{N}$, et F l'ensemble $\mathbb{N}-E$.
Montrer que F est non vide. Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, F est non borné.
On suppose que $a \wedge b = 1$. Montrer que ab – a – b + 1 et tous les entiers supérieurs à ce nombre sont éléments de E. En déduire que F a un plus grand élément et a pour cardinal (a-1)(b-1)/2.

-----------------------------------------

**I.28**** ***Avec Fermat*** Soit A = 11….122…2….99…9 , où tout chiffre de 1 à 9 est écrit p fois et B = 123456789 . Montrer que si p est un nombre premier A-B est divisible par p.

-----------------------------------------

**I.29** ***Déterminer les nombres tels qu'en supprimant n'importe quel chiffre de leur écriture décimale le nouveau nombre obtenu soit divisible par 7.

-----------------------------------------

**I.30** ***$ *** polynômes de Dewasme*** a et b étant 2 entiers naturels, montrer que si $a^2+b^2$ est divisible par 1+ab le quotient k est un carré.
n étant un entier choisi déterminer les couples (a, b) pour que le quotient soit $n^2$.

-----------------------------------------

**I.31 ***** ***Le problème qui rend fou.*** On propose à 2 excellents mathématiciens de découvrir 2 nombres. Pour cela on donne au premier (A) la somme de ces 2 nombres, et au second (B) leur produit. S'engage alors le dialogue suivant : (B) « Je ne peux pas trouver ces nombres », (A) « Je le savais », (B) « Alors je les connais », (A) « Alors moi aussi ».
Et vous ? Pouvez-vous trouver ces nombres ?

-----------------------------------------

**I.32 **** Etant donnés 10 nombres entre 1 et 100, on peut toujours former 2 sommes égales en utilisant certains de ces nombres.

-----------------------------------------

**I.33 *** Montrer que parmi les nombres qui s'écrivent en alternant des 0 et des 1, comme 10101, il y a un seul nombre premier.

# II ANALYSE équations, fonctions, suites, intégrales

**II.1** Le peloton du tour de France fait 100 mètres de long et roule à vitesse constante v. Une moto roulant à vitesse constante V part du denier coureur, remonte jusqu'au premier, fait demi-tour instantanément et croise le dernier coureur du peloton au moment où celui-ci a parcouru 100 mètres depuis que la moto l'a quitté. Quelle distance a parcouru la moto entre les 2 moments où elle côtoie le dernier coureur ?
(*je sais que le demi-tour instantané à vitesse constante est peu plausible, mais il y a bien des fils sans masse, des poulies sans frottements et des cyclistes qui roulent dans le vide !!!)*

-----------------------------------------

**II.2** ***Le train sifflera 3 fois***. Sur une voie ferrée rectiligne, un train traverse un passage à niveau avant d'entrer en gare et donne un coup de sifflet du passage à niveau jusqu'au-delà de la gare. Monsieur Machin, cheminot, a remarqué que la durée du coup de sifflet lui paraissait plus courte de 1,5 seconde quand il travaillait au-delà de la gare que quand il était avant le passage à niveau ou, par contre, elle lui paraissait plus longue d'une seconde que quand il était à la gare. Quelle est la distance entre la gare et le passage à niveau ? Quelle est la distance parcourue par le train pendant son coup de sifflet ? *(le son se propage à 340 m/s ).*

-----------------------------------------

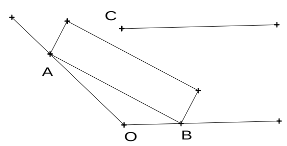
**II.3 *** Une caisse cubique de 70 centimètres de côté est posée contre un mur. On appuie contre le mur une échelle de 2,5 mètres qui est en contact avec la caisse. A quelle hauteur maximale l'échelle peut-elle s 'appuyer sur le mur ?

-----------------------------------

**II.4 **** Le rectangle de côtés 5 et 1 doit, en glissant en A et B entrer entre les 2 demi-droites parallèles d'origines O et C

L'angle $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA})$ vaut $\dfrac{3\pi}{4}$

Quelle doit être la distance OC ?




-----------------------------------------

**II.5** Un escalier roulant monte à vitesse constante. Léon monte 20 marches et arrive en haut en 15 secondes ; Suzy, en montant 22 marches ne met que 12 secondes alors que Gaston qui descend met 18 secondes. Combien a-t-il descendu de marches ?

-----------------------------------------

**II.6 ***** ***L'escalier du pharaon*** Un escalier comporte 9 marches de hauteurs respectives (en partant du bas) 1-1,5-0,7-1-1,2-1-0,8-1,2-1 et de profondeurs 3-4-1-5-3-4-4-3 (la dernière est le palier) Le pharaon décide de le transformer en un escalier de 4 marches en minimisant le volume à ajouter. Donner les dimensions des nouvelles marches.

-----------------------------------------

**II.7** Un cycliste part à 8 heures du matin voir sa fiancée, et arrive chez celle-ci après s'être arrêté pour acheter des fleurs. Il en repart le lendemain matin à 8 heures et arrive chez lui après plusieurs crevaisons. Ayant utilisé le même trajet à l'aller et au retour, montrer qu'il y a un endroit où il s'est trouvé les 2 jours à la même heure.

-----------------------------------------

**II.8**** On choisit un nombre réel x et un entier n. Montrer que parmi les nombres
x, 2x, 3x, ……….(n-1)x , il y en a au moins un qui est à moins de 1/n d'un nombre entier.

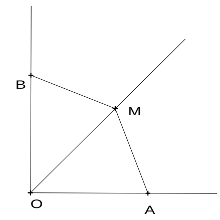
-----------------------------------------

**II.9** Etudier rapidement la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ On note D le domaine de définition de f et I = ]-1 ; 1 [ . On considère alors pour $a \in D$, l'équation f(x) = f(a) ; montrer que cette équation a 3 solutions, dont une et une seule dans I . Déterminer algébriquement les 3 solutions et représenter graphiquement la fonction g qui à a associe celle des solutions qui est dans I.

-----------------------------------------

**II.10** ***Le paravent***

Un paravent est constitué de 2 parties MA et MB articulées en O, de1 mètre chacune. On place ce paravent dans le coin BOA d'une pièce (angle droit) M étant sur la bissectrice. On cherche à obtenir une surface OAMB maximale.




Etudier ce problème :

1) en prenant comme inconnue l'abscisse x de M dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

2) en prenant l'angle. $\theta = (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{OB})$

-----------------------------------------

**II.11** On considère la fonction $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ . Etudier f en séparant en 2 cas. On montrera que la droite d'équation y = 2x est asymptote quand x tend vers plus l'infini et l'existence de tangentes verticales en +1 et –1.

-----------------------------------------

**II.12** ***Un amour de fonction*** Etudier $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $v(x)=\sqrt{2|x| - x^2}$ et en particulier leur dérivabilité en 0 et 1. En déduire l'étude de v+u et de v-u . Quelle est l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de ces 2 dernières fonctions.

-----------------------------------------

**II.13** Etudier $f(x) = x^2 \sqrt{-\ln x}$ et préciser les tangentes aux extrémités du domaine.

-----------------------------------------

**II.14** On pose $f_a(x) = x^a \exp(-x^2)$ avec a réel positif . Etudier les fonctions $f_a$ en précisant selon a la tangente en O . Déterminer une fonction g dont la courbe représentative contient les points d'ordonnée maximale de toutes les courbes $C_a$ . Etudier g et représenter sur un même graphique la courbe de g et celles de $f_a$ pour a=1/2, a=1, a= 9/2.

**II.15** ***La tractrice*** $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,$sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ Etudier rapidement ch(x). (on appelle C sa courbe représentative). Soit M un point de C d'abscisse a > 0 , m sa projection sur l'axe des abscisses et P la projection de m sur la tangente Δ en M à la courbe C Ecrire l'équation de Δ et déterminer les coordonnées de P (en fonction de a). Quelle est la distance mP ? On pose $f(t) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}\right) - \sqrt{1 - t^2}$ . Etudier la fonction f . (On admettra que la courbe Γ de f a une tangente horizontale en 1). Montrer que les coordonnées x,y de P vérifient la relation x = f(y) et en déduire à partir de Γ l'ensemble des points P quand M décrit C. Montrer que mP est tangente à cet ensemble.

-----------------------------------------

**II.16** On considère la fonction $f(t) = t - \ln|t|$

Etudier succinctement f et en déduire l'existence d'un réel $t_0$ unique tel que $f(t_0) = 0$
Donner un encadrement de $t_0$ à $10^{-2}$ et le signe de f (t) selon les valeurs de t.

Soit maintenant la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left|1-\frac{1}{x}\right| + x - 1$. Etudier les limites de g en 1 et à l'infini. Montrer que g a une limite finie quand $x$ tend vers 0. Si on prolonge g en prenant cette limite comme valeur de g(0), quelle est alors la tangente en 0 à la courbe représentative de g ?.
Montrer que la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote à la courbe de g.

Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = f(t)$ en posant $t = \frac{x}{x-1}$. En déduire alors les variations de g (On appellera $x_0$ la valeur annulant g ' )
Exprimer $g(x_0)$ en fonction de $t_0$ et en déduire un encadrement de $g(x_0)$.

------------------------------------------

**II.17** *** ***Moyenne généralisée***. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta = 1$ ; soit b un réel positif et h(x) la fonction définie par $h(x) = \alpha x + \beta b - x^{\alpha} b^{\beta}$. En étudiant les variations de h montrer que pour tout a>0, on a : $\alpha a + \beta b \geq a^{\alpha} b^{\beta}$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$
Si $a_1 \ldots a_p$ et $b_1 \ldots b_p$ sont 2 suites de réels strictement positifs montrer l'inégalité :

$$(H) : \sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)^{\beta}$$

(On pourra poser $A_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{p} a_i}$ et $B_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{p} b_i}$).

$c_1 \ldots c_p$ étant une suite de réels positifs de somme 1 et $d_1 \ldots d_p$ une suite strictement croissante de réels positifs, on pose $m(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} c_i d_i^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Déterminer les limites de m(x) quand x tend vers 0, $+\infty$ , $-\infty$ . (la limite en 0 servira de prolongement et sera notée m(0)
On suppose $0<x<y$ , montrer en utilisant (H) que $(m(x))^{x} < (m(y))^{x}$ ; montrer une relation analogue si x et y sont négatifs ; en déduire que m est croissante sur $\mathbb{R}$**.**
**(***En comparant m(-1) , m(0) , m(1) , m(2) on obtient les inégalités usuelles sur les moyennes harmoniques , géométriques , arithmétiques et quadratiques*).

------------------------------------------

**II.18** On considère la suite $u_n$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 6 - \frac{8}{u_n}$

Montrer que pour tout n, $2 < u_n < 4$ et que $u_n$ est croissante.

Montrer que $4 - u_n < \frac{2}{3}(4 - u_{n-1})$ et en déduire que $u_n$ a pour limite 4.

Montrer que $\frac{u_n - 4}{u_n - 2} = \frac{1}{2}\frac{u_{n-1} - 4}{u_{n-1} - 2}$ et en déduire $u_n$ en fonction de n.

Soit alors $v_n$ telle que $v_0 = 1$ , $v_1 = 3$ , et $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 8v_n$ . Montrer que $\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} = u_{n+1}$ et en déduire $v_n$ en fonction de n.

------------------------------------------

**II.19** ***Flocon de Von Koch*** . La courbe $K_0$ est un triangle équilatéral de côté 1 d'aire s On définit par récurrence une famille de courbes $K_n$ de la manière suivante : chaque courbe est obtenue à partir de la précédente en remplaçant chaque segment par une ligne brisée en construisant un triangle équilatéral sur le tiers central du segment. Déterminer le périmètre et l'aire de $K_n$ ainsi que leurs limites quand n tend vers l'infini.

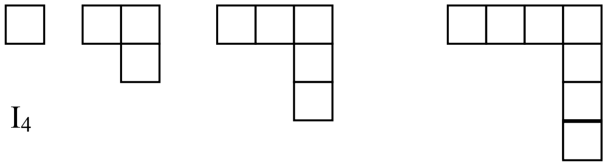
**II.20** ***Puzzles et récurrence.***

*Introduits par l'école Pythagoricienne les nombres figurés sont des représentations géométriques où chaque petit carré représente une unité. Ils permettent par assemblage de découvrir des propriétés de sommes de nombres.*

Sur les exemples qui suivent découvrez ces propriétés puis justifies les par récurrence.

Somme des nombres impairs ( *Pythagore* )

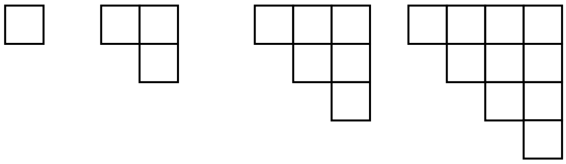
Assemblez les nombres impairs dans leur représentation ci contre pour déterminer la valeur de $1+3+5+\ldots\ldots.+(2n-1)$



$I_1$ $I_2$ $I_3$ $I_4$

Somme des nombres entiers (*Theon de Smyrne* )

Montrez que l'assemblage de $8\,s_n+1$ donne un carré avec $s_n=1+2+3+\ldots\ldots..+n$



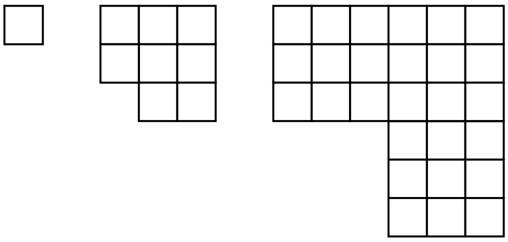
$s_1$ $s_2$ $s_3$ $s_4$

Somme des cubes (*Al Karagi* )

Les cubes peuvent se représenter par un carré dont on a enlevé un morceau

$S_n=1^3+2^3+\ldots\ldots..+n^3$ est l'assemblage de ces morceaux .Représenter $c_4$

Déterminer $S_n$

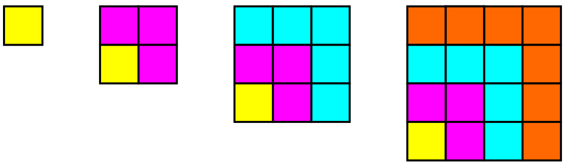


$c_1$ $c_2$ $c_3$

Somme des carrés (*Dewasme* )

On pose $k_n=1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2$

En partant de la représentation naturelle des carrés et en les découpant comme dans 1) on peut les réassembler pour montrer que



$k_n= n\times1+(n-1)\times 3 + \ldots.1\times(2n-1)$ $A_4 =1 + 4 + 9 + 16$

$$= \sum_{p=1}^{n}(n-p+1)(2p-1)$$ ce qui est illustré

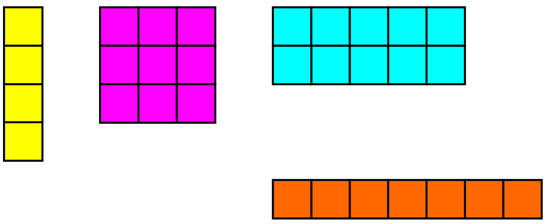
ci contre par l'égalité $A_4 = B_4$

Représenter $B_5$

Montrer qu'en assemblant convenablement 2 « A » et 1 « B » on obtient un rectangle.

En déduire la valeur de $k_n$

(on fera le dessin de l'assemblage pour $k_4$)



$B_4=4\times1 + 3\times3 + 2\times5 + 1\times7$

------------------------------------------

**II.21** ** On considère la série harmonique $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots\frac{1}{n}$. Montrer que pour n>1, $u_n$ est, sous forme de fraction irréductible, le quotient d'un entier impair par un entier pair et en déduire que si n>1 , $u_n$ n'est pas un entier.

------------------------------------------

**II.22** ** On pose $u_1=1$ et $u_{n+1}= 2u_n + \sqrt{3u_n^2+1}$ . Montrer que $u_n$ est entier pour tout n de $\mathbb{N}$.

------------------------------------------

**II.23** ** a est un entier impair et b un entier positif. On pose $u_0=b$ et si $u_n$ pair, $u_{n+1}=0,5u_n$, alors que si $u_n$ est impair, $u_{n+1}= a+u_n$ . Montrer qu'il existe p tel que $u_p \leqslant a$ et que $u_n$ est périodique à partir du rang p.

------------------------------------------

**II.24** On appelle ***suite de Fibonacci*** la suite $u_n$ définie par $u_0=u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n$ est un entier strictement positif et que $u_n \to +\infty$ .
Montrer que 2 termes consécutifs de cette suite sont toujours premiers entre eux.
Quelle relation de récurrence de la forme $v_{n+1}= f(v_n)$ définit la suite $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ?
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \in$ I= [ 1 ; 2 ] .
Montrer que l'équation x = f(x) a une solution unique dans I (on appellera k cette solution)
Montrer que $v_n$ converge vers k.
Forme explicite de $u_n$ :

*Première méthode* :

Montrer que $u_{n+1} - k\, u_n$ est une suite géométrique, de même que $u_{n+1} + \frac{1}{k} u_n$ .
En déduire $u_n$ en fonction de n .

*Deuxième méthode :*

Montrer que $(k)^n$ et $(- \frac{1}{k})^n$ vérifient la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Déterminer les solutions α et β du système $\begin{cases} 1=\alpha+\beta \\ 1=\alpha k-\frac{\beta}{k} \end{cases}$

Montrer par récurrence que $u_n = \alpha(k)^n + \beta(- \frac{1}{k})^n$

*Question subsidiaire :*

Résoudre l'équation $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{.}{.+\cfrac{.}{.+\cfrac{.}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}}}$ ( n dénominateurs superposés)

*On montre ainsi que le rapport de 2 termes consécutifs de la suite de Fibonacci a pour limite le nombre d'or et que ce nombre d'or a une écriture en fraction continue qui ne contient que des 1.*

------------------------------------------

**II.25** ***Algorithme de Babylone***

Soit $u_n$ définie par $u_0 = 1{,}5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ et $v_n = u_n - \sqrt{2}$

Montrer que pour tout n $u_n > \sqrt{2}$ et que $u_n$ est décroissante.

Montrer que $v_{n+1} < \frac{v_n^2}{2\sqrt{2}}$ . En déduire une majoration de $v_n$ fonction de n et la convergence de $u_n$.

------------------------------------------

**II.26** * Montrer que l'équation $-1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 0$ a pour $n > 2$ une solution positive unique $u_n$

Montrer que $u_n$ est décroissante , convergente , et a pour limite 0,5.

------------------------------------------

**II.27** Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = u_n - \sqrt{n}$ . Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

En déduire par itération que $u_n$ diverge, que $v_n$ est décroissante et convergente.

------------------------------------------

**II.28** *** ***fractions continues.*** Etant donné un réel positif x non entier, montrer qu'il existe un couple unique $a_0 \in \mathbb{N}$, $x_1 > 1$ tel que $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$ et de proche en proche :

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Montrer que si x est rationnel, il existe n tel que $x_n$ soit entier ( et réciproquement)

On suppose dans la suite que x n'est pas rationnel, l'opération est alors illimitée et on dit qu'on a développé x en fraction continue. On appelle alors $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ le rationnel obtenu en arrêtant l'opération à $a_n$ :

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{. + \cfrac{.}{. + \cfrac{1}{a_n}}}}} \quad :$$

Montrer par récurrence que $x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}$ avec $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

Montrer que $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$ . En déduire que $r_n$ est irréductible et que x est entre $r_n$ et $r_{n-1}$.

Montrer que $q_n > 2q_{n-2}$ . En déduire que $q_n$ tend vers $+\infty$ et que $x - r_n$ tend vers 0.

Déterminer $a_n$ pour $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et pour $x = 1 + \sqrt{2}$ .

------------------------------------------

**II.29** ***Constante d'Euler.*** Montrer que pour tout entier n >1; $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(\frac{n+1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$

On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$ ; $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ . Montrer que $u_n$ est croissante; $v_n$ décroissante et que ces 2 suites ont la même limite C appartenant à ]0 ;1[.

------------------------------------------

**II.30** On considère pour x dans $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ , $\varphi(x) = \tan x$ , et on pose pour tout x réel,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \ .$$

Quelle est l'aire du domaine délimité par la courbe de φ et les droites x=0 et y=1
Montrer que f est une fonction impaire .
Calculer la dérivée de f(φ(x)) et en déduire f(0) , f(1) , f($\sqrt{3}$) .

Calculer avec une intégration par parties et les valeurs de la fonction f : $I = \int_1^{\sqrt{3}} \ln(1+t^2)\,dt$ .

On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que $\frac{1}{1+x^2} \le g(x) \le 1$ et en déduire la limite de g en 0 .
Déterminer la limite de f(x) ln x quand x tend vers 0.

**II 31** *** Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant f(xf(y)) = yf(x) pour tout couple (x,y) et telles que f(x) a une limite nulle quand x tend vers + ∞ .

-----------------------------------------------

**II.32** * ***Moyenne.*** Pour toute fonction f , monotone , indéfiniment dérivable sur [ 0 ; +∞ [, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ , moyenne de f sur [0 ;x], définit une fonction notée F . Montrer que F a pour limite f(0) si x tend vers 0 , que F est monotone, de même sens que f , que F est indéfiniment dérivable, et que :

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f^{(n)}(t)\,dt$$

-----------------------------------------------

**II.33** * ***Volume du tore*** On appelle tore le volume obtenu en faisant tourner un cercle de centre A de rayon r autour d'un axe D situé à une distance R > r de A.
Montrer que la section du tore par un plan orthogonal à D est une couronne d'aire S que l'on déterminera et en déduire le volume V du tore sous forme d'une intégrale.

On pose $F(x) = \int_0^x \sqrt{r^2 - z^2}\,dz$ et g(x) = F(r sin x) . Calculez successivement g '(x) , F(x) et V.

-----------------------------------------------

**II.34** ** ***Prolongement. (bac 75)*** Soit $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ pour x > 0 avec f(0) = 0 et $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$ .

Montrer que F est définie, positive et croissante sur tout intervalle de D = [0 ;1 [ ∪ ]1 ; +∞ [ .

Montrer que $\frac{x^2 - x}{2\ln x} < F(x) < \frac{x^2 - x}{\ln x}$ et en déduire les limites de F on 0 et en +∞ .

Calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ , montrer que F(x) – ln 2 a une limite nulle quand x tend vers 1 et donner l'allure de la courbe représentant F.

-----------------------------------------------

**II.35** ***Intégrale de Bessel.*** On pose $f(t) = \dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1}$ , F une primitive de f , et

$g(x) = F(\dfrac{1 + \tan x}{2})$ . Calculer g '(x) , g(x) et en déduire $\int_0^1 f(t)dt$ .

On pose alors $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ et $u_n = I_{n,n}$ . Montrer par encadrement que $u_n$ a pour limite 0. .Par une intégration par parties déterminer une relation entre $I_{p+1,q+1}$ et $I_{p+2,q}$ et en déduire que $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ ; comparer avec la valeur de $u_n$ obtenue directement après développement de $(1\text{-}t)^n$ par la formule du binôme. Montrer que $\int_0^1 \dfrac{[2t(1-t)]^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en intégrant $f(t) - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$ , déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} 2^k u_k$ quand n tend vers $+\infty$ .

-----------------------------------------

**II.36 *** ***Intégrale de Wallis et formule de Stirling.*** Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ . Calculer $I_0$ et $I_1$. Montrer que $I_n$ est une suite décroissante et par un intégration par parties que $nI_n = (n\text{-}1)I_{n-2}$ . En déduire la limite de $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ . Par une itération de la relation de récurrence, calculer $I_n$ (séparer n pair et n impair). On pose $u_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^n \sqrt{n}}$ . On admet que $u_n$ est convergente ; déterminer la limite de $u_n$ en comparant $\dfrac{(u_n)^2}{u_{2n}}$ et $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ .

-----------------------------------------

**II.37** *** $\sum_1^{\infty}$ *et* $\int_0^{\infty}$ *désignent les limites en* $+\infty$ *des expressions envisagées ; on admettra l'existence de ces limites dans tout le problème.*

$f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{e^x - 1}$ pour $x > 0$ et $f_n(0) = 1$ . Montrer que $0 \le f_0(x) \le 1$ , que $f_n(x) = f_0(x) - \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}$

Calculer $I_k = \int_0^{\infty} xe^{-kx}dx$ , montrer que $\int_0^{\infty} f_n(x)dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et que

$\int_0^{\infty} f_0(x)dx = \sum_1^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ .

On définit sur [0 ;π] la fonction g par : g(0) = 2a et $g(t) = \dfrac{at+bt^2}{\sin(t/2)}$.

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} g(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)dt$ Déterminer a et b pour que $\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}$

Montrer que $\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos(kt) = \dfrac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}$ et en déduire la valeur de $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

-----------------------------------------------

**II.38** *** Montrer que si a; b; c sont dans [0 ;1] : $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} \leqslant 2$

-----------------------------------------------

**II.39** ****bac 78 : incroyable mais vrai !***

Soit $f(x) = \int_0^{\pi/4} \exp(-\frac{x}{\cos^2 t})dt$

Comparer f(x) et exp(-x) et déterminer la limite de f en $+\infty$.

Montrer que si b > 0 alors si x>-b : $\exp(x)-1-x \rhd 0{,}5x^2\exp(-b)$ et si x<b $\exp(x)-1-b \lhd 0{,}5x^2\exp(b)$

On définit $\varphi(x)$ par $f(x)=f(a)+(x-a)[\varphi(x) - \int_0^{\pi/4} \dfrac{\exp(\frac{-a}{\cos^2 t})}{\cos^2 t}dt$ ].

Montrer que $\varphi(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow a$ . En déduire que f est dérivable et la valeur de f '(x).

Soit P(x) une primitive de exp( - x²) et Q(t) = P(x tan(t)).

Montrer que Q est dérivable et que $\int_0^x \exp(-t^2)dt = x \int_0^{\pi/4} \dfrac{\exp(-x^2\tan^2 t)}{\cos^2 t}dt$.

Soit g(x) = f(x²) . Montrer que $g'(x) = -2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2)dt$.

On pose $h(x) = g(x) + (\int_0^x \exp(-t^2)dt)^2$ .

Calculer h'(x) et en déduire la limite en $+\infty$ de $\int_0^x \exp(-t^2)dt$ .

-----------------------------------------------

**II. 40** ***

a est un paramètre réel; $g_a(x) = a + \dfrac{\exp(-x^2/2)}{x} + \int_0^x \exp(-t^2/2)dt$ et $f_a(x) = \dfrac{\exp(-x^2/2)}{a + \int_0^x \exp(-t^2/2)dt}$.

On admet que limite en $+\infty$ de $\int_0^x \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Comparer $g_{-a}(-x)$ et $g_a(x)$, $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$. Etudier les variations de $g_a$ et de $f_a$ pour a<0 en séparant pour $f_a$ les cas $a < -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $a > -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

# III PROBABILITES et dénombrements

**III 1** \$ En entrant dans un pub, à la fin d'un match de rugby France-Ecosse, j'y trouvai : 8 femmes, 82 personnes ivres, 2 hommes en kilt n'ayant pas bu, 4 femmes en pantalon, 6 personnes ivres en pantalon, 77 hommes en kilt, 19 personnes en pantalon et 1 femme ivre en pantalon.
Combien étions nous donc dans ce pub ?

------------------------------------------

**III 2** ** Dans un damier carré de $n \times n$ cases combien y a t il de carrés ? de rectangles ? Dans un triangle équilatéral de côté n où on a tracé toutes les unités des parallèles aux côtés, combien y a t il de parallélogrammes ?

------------------------------------------

**III 3** ** ***Les problèmes du facteur*** Un premier facteur (stagiaire) arrive devant un immeuble dont l'entrée est dépendante d'un digicode de 4 chiffres non nuls. Il sait que ces 4 chiffres sont différents ; combien y a t il de codes différents ? Une fois rentré dans l'immeuble, il trouve 10 boites aux lettres dans lesquelles il doit répartir 7 prospectus différents. Combien a t il de répartitions possibles s'il ne met qu'un prospectus par boite ? S'il peut mettre plusieurs prospectus dans la même boite ?
Un second facteur (titulaire expérimenté) se trouve confronté aux mêmes types de situations, mais le digicode est à 5 chiffres et il sait que ces 5 chiffres sont dans un ordre strictement croissant ( on peut aussi envisager croissant au sens large). Il a quant à lui 7 prospectus identiques et il peut en mettre plusieurs par boite .Répondre aux mêmes questions.

------------------------------------------

**III 4** Au tapis vert on choisit 4 cartes dans un jeu de 32 , une dans chaque couleur. Combien y a t il de choix possibles ? Retrouver ce total en comptant séparément les cas avec 4 cartes identiques (carrés), 3 cartes identiques (brelans) ,4 cartes différentes, 2 fois 2 cartes identiques (double paire) 2 cartes identiques et 2 autres différentes (simple paire).

------------------------------------------

**III 5** ** ***Promenades aléatoires.*** Etant donné un repère orthonormal (O,i,j) et E l'ensemble des points à coordonnées entières, on appelle chemin [AB] , avec A et B dans E , toute succession ordonnée de vecteurs i et j dont la somme est le vecteur AB (c'est un trajet en lignes brisées parallèles aux axes).
Combien y a t il de chemins de longueur n ? Quel est l'ensemble de leurs extrémités ?
Si B a pour coordonnées (p,q) (dans $\mathbb{N}$ ) combien y a t il de chemins [OB] ?
On suppose p=q. En décomposant les chemins [OB] selon leur intersection avec la droite d'équation x+y=p , montrer que $C_{2p}^{p} = \sum_{k=0}^{p} (C_p^k)^2$ .
Soit D la droite d'équation y=x+r , r entier positif, et O' le symétrique de O par rapport à D.
Montrer que si A est un point de D d'abscisse positive, le nombre de chemins [OA] est égal au nombre de chemins [O'A] . En déduire, si B a pour coordonnées (p,q) avec q < p+r , le nombre de chemins [OB] n'ayant aucun point sur D.
On simule la réussite d'un joueur en prenant i s'il gagne et j s'il perd ; la droite D est la droite de ruine (si le joueur arrive sur D il doit s'arrêter). Combien y a t il de cas ou le joueur peut jouer n fois sans être ruiné ?

------------------------------------------

**III 6** ** On dispose de p couleurs avec lesquelles on colorie au hasard n cases d'une bande. Quelle est la probabilité pour que 2 cases voisines soient toujours de couleurs différentes ? Reprendre la question avec les cases d'une couronne circulaire.

------------------------------------------

**III 7** On considère 2 événements A et B tels que $p(B/A) = \frac{2}{3}$; $p(\overline{A} / \overline{B}) = \frac{9}{11}$ et $p(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{12}$.

Déterminer p(A) et p(B).

---------------------------------------------

**III 8** ***Les variables aléatoires du garagiste*** Un garagiste a 2 voitures qu'il peut prêter à ses clients. Chacune de ces voitures est indisponible une fois sue cinq de manière indépendante. X est la variable aléatoire égale au nombre de voitures disponibles, Y est le nombre de clients demandeurs, et Z le nombre de voitures prêtées. On sait que p(Y=0) = 0,3 , p(Y=1) = 0,5 et p(Y>1) = 0,2 . Déterminer la fonction de répartition de Z.

---------------------------------------------

**III 9** $ ***Il était une fois dans l'Ouest.*** Le général CUSTER a conduit son armée à l'entrée d'un canyon. Il estime qu'il a 40 % de chances à priori pour que SITTING BULL lui tende une embuscade. Il décide d'envoyer ses deux éclaireurs en reconnaissance. Le premier, un blanc qui se trompe une fois sur quatre lui déclare qu'il n'y a pas de danger. Le second, un indien qui lui ment une fois sur trois, lui annonce un guet-apens. Quelle est la probabilité pour que l'armée de CUSTER soit massacrée (ce qui est une certitude en cas d'embuscade: relire l'histoire et en question subsidiaire donner le nom du canyon).

---------------------------------------------

**III 10**** $ ***Le bon, la brute et le truand.*** Lors de mon dernier séjour dans l'Ouest, à la sortie d'un saloon, j'ai participé à un duel à trois (référence cinématographique : le bon, la brute et le truand) qui m'opposait à LUCKY LUKE et JOE DALTON. Les règles étaient simples : chacun tirait à son tour sur l'adversaire de son choix. Ma tâche était délicate car LUCKY LUKE (A) touche sa cible à tous les coups et JOE (B) neuf fois sur dix alors qu'étant myope (C) je n'atteins la cible qu'une fois sur deux ! Sachant que LUCKY LUKE et JOE DALTON avaient tout intérêt à tirer l'un sur l'autre puisque je n'étais pas dangereux, j'ai mis au point une stratégie ingénieuse : j'ai décidé de tirer en l'air tant que j'aurais 2 adversaires.
Pouvez vous expliquer, en calculant ma probabilité de survie, pourquoi je suis encore là à vous raconter ces bêtises.

---------------------------------------------

**III 11** $$ ***Le fonctionnaire.*** Un fonctionnaire (par exemple un prof de maths) qui a 90 jours de vacances, ne travaille pas le dimanche, samedi et mercredi après-midi, soit 104 jours, dort pendant 91 jours (6 heures par jour), prend 3 heures par jour pour ses repas et le café (45 jours), est absent 8 jours pour maladie, a droit comme tout le monde à 7 jours fériés (Noël, Toussaint, 1 et 8 Mai, lundi de Pentecôte, jeudi de l'ascension et 14 Juillet) ne travaille donc que 365-90-104-91-45-8-7 c'est-à-dire 20 jours par an ! Peut-il se plaindre d'être mal payé ?

---------------------------------------------

**III 12 * *Elections, piège à…..*** Considérons un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur au triangle. Montrer que la somme des distances de M aux 3 côtés du triangle est indépendante de M Considérons alors a, b, c les pourcentages de voix obtenus par 3 candidats lors d'une élection. La somme des 3 pourcentages étant 1, il existe un unique point M intérieur au triangle équilatéral de hauteur unité, M étant aux distances a, b, c des côtés. Cette élection doit désigner au scrutin proportionnel 5 délégués. Les points correspondant pour chaque liste à un nombre exact d'élus sont les sommets de 25 triangles équilatéraux. Montrer que si l'élection se fait au plus fort reste, l'intérieur de chaque petit triangle se partage en 3 zones par les segments joignant le centre du triangle au milieu des côtés et le triangle initial se partage en un pavage hexagonal. En déduire alors qu'une liste peut perdre 1 élu tout en gagnant des voix. Déterminer les probabilités de chaque type de résultats.

# IV COMPLEXES et GEOMETRIE

**IV 1** On considère un triangle équilatéral direct ABA' , O le milieu de AA' et un repère orthonormal d'origine O dans lequel B a pour affixe i . Les bissectrices du repère coupent AB et A'B en C et C' . Montrer que si C a pour affixe c, C' a pour affixe ic et que $c' = ce^{-i\frac{\pi}{3}} + ie^{i\frac{\pi}{3}}$

En comparant les 2 expressions déterminer c sous forme algébrique et trigonométrique.

-------------------------------------------

**IV 2 *** ***La droite de Simson.*** Soit P un point d'affixe p et Γ le cercle de diamètre OP. A,B,C sont trois points du cercle Γ et on appelle a,b,c leurs affixes. On désigne par A',B',C' les points d'affixes respectives $a'= \frac{bc}{p}$, $b'= \frac{ca}{p}$, $c'= \frac{ab}{p}$.

Montrer que A' est la projection orthogonale de O sur BC (idem pour B' et C' )
Montrer que A', B', C' sont alignés.

-------------------------------------------

**IV 3** ***Le théorème de Johnson.*** Trois cercles $C_1$ ,$C_2$ ,$C_3$ de centres P,Q,R ont le même rayon ρ et un point commun O . $C_2$ et $C_3$ se recoupent en A, $C_3$ et $C_1$ en B, $C_1$ et $C_2$ en C. On appelle Ω le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC , G et G' les centres de gravité des triangles ABC et PQR. On choisit O comme origine et on appelle p,q,r les affixes de P,Q,R . Déterminer les affixes de A,B,C (on les notera a,b,c) . Montrer que p+q+r est l'affixe de Ω. En déduire que ABC et PQR sont symétriques par rapport au milieu S de OΩ. En déduire aussi que Γ a pour rayon ρ . Montrer que OΩSGG' sont alignés.

On pose $Z = \frac{p+r}{p-r}$. Montrer que Z est imaginaire, que $Z = \frac{b}{c-a}$ et déduire que Ω est l'orthocentre de PQR et O celui de ABC.

-------------------------------------------

**IV 4** ***Les triangles d'or.*** Soit k le nombre d'or (solution positive de $k^2 = k + 1$ ). Montrer que $k^{n+2} = u_{n+1}k + u_n$ , où u est une suite de Fibonacci. On considère alors l'angle α entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,tel que $\cos \alpha = \frac{1}{2k}$ ; calculer cos 5α et en déduire α. Dans la suite on appelle triangle d'or un triangle isocèle d'angle au sommet $\frac{\pi}{5}$. Si ABC est un tel triangle, avec AB = AC, on note CD et BE les bissectrices qui se coupent en I et s la similitude définie par s(A)=C et s(C)=B ; quel sont l'angle et le rapport de s.

Montrer que s(B)=D et s(D)=I. En déduire que si O est le centre de s , OADC sont cocycliques ainsi que OCIB. On définit J et K par A=s(J) et J=s(K) . Montrer que JBC sont alignés ainsi que KAC. Montrer que OBEK sont cocycliques, que B est le centre du cercle inscrit dans AKJ et que O est à l'intersection de KD et IJ. Etant donné un repère orthonormal d'origine B dans lequel C a pour affixe 1, déterminer la formule complexe de s et l'affixe de O.

-------------------------------------------

**IV 5** On considère dans un repère orthonormal les points A(0 ;1) , B(-2 ;1) , C(-2 ;0) , D(0 ;2) , E(1 ;2) , F(1 ;0) , et on appelle I le centre de OABC et J celui de ODEF . On cherche les isométries f transformant OABC en ODEF. Montrer qu'il y a 4 solutions dont on donnera les caractéristiques.

-------------------------------------------

**IV 6** ***exp(z.)*** **.** Montrer que pour x réel $(1+\frac{x}{n})^n$ a pour limite $e^x$ quand n tend vers $+\infty$ .

On prend maintenant z complexe, z=x+iy , et $Z = (1+\frac{z}{n})^n$ , on appelle r et θ le module et l'argument de Z .

Montrer que r a pour limite $e^x$ quand n tend vers $+\infty$ . Calculer $\tan(\frac{\theta}{n})$ en fonction de x et y et montrer que $n\tan(\frac{\theta}{n})$ a pour limite y ; en déduire la limite de θ. Conclure que Z a pour limite $e^z$ .

-----------------------------------------

**IV 7 *** ***L'heptagone.*** On considère les points $A_k$ d'affixes $e^{2ik\frac{\pi}{7}}$ Montrer que $A_{k+7} = A_k$ , calculer $L_1 = A_kA_{k+1}$ $L_2 = A_kA_{k+2}$ et $L_3 = A_kA_{k+3}$ On appelle A,B,C les intersections de $A_2A_4$ et $A_5A_6$ , de $A_0A_3$ et $A_2A_4$ , de $A_0A_3$ et $A_5A_6$ Déterminer les angles du triangle ABC .
Montrer que $A_6$ , $A_4$ , $A_0$ sont les milieux de AC , AB , BC et en déduire que le cercle Γ circonscrit à ABC a pour rayon 2 et pour centre Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = 3\,\overrightarrow{OG}$ (G centre de gravité de ABC)
Montrer que $A_0A_6$ , $A_1A_3$ , $A_0A_4$ sont les médiatrices de $CA_2$ , $AA_3$ , $BA_5$ . En déduire que ces droites sont les hauteurs du triangle ABC et que l'orthocentre H de ABC est le symétrique de Ω par rapport à O. Montrer que B est le centre du cercle inscrit dans $A_2A_3A_5$ . Montrer que CΩ est un diamètre du cercle circonscrit à $CA_0A_6$ et que $A_1$ appartient à Γ.

-----------------------------------------

**IV 8** A B C est un triangle équilatéral et Γ son cercle circonscrit. Pour tout point M de Γ distinct de A et B on appelle H la projection orthogonale de A sur la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ Quel est l'ensemble des points H quand m décrit Γ .

-----------------------------------------

**IV 9 *** Soient 3 points ABC sur le cercle Γ de centre O de rayon 1, I le centre du cercle inscrit de ABC et A' B' C' les intersections de Γ avec les bissectrices de ABC. Montrer que I est l'orthocentre de A' B' C'.
Montrer que $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OI}$ est un vecteur orthogonal à (B'C'), (C'A') et (A'B')
Soit S la similitude directe transformant B' et C' en C et B . On désigne par des minuscules les affixes des points correspondants. Montrer que $a'^2 = bc$ , puis que $\frac{a'b'c'}{abc} = -1$
Ces relations sont vérifiées si on pose $a = p^2$ , $b = q^2$ , $c = r^2$ , $a' = -qr$ , $b' = -rp$ , $c' = -pq$
(*Ce que l'on suppose dans la suite*). Déterminer la formule complexe de S et montrer que s(A) = I . Montrer que S est une translation si et seulement si ABC est équilatéral.
Dans les autres cas montrer que I a pour affixe $\frac{1}{\overline{\varpi}}$, Ω étant le centre de S.

-----------------------------------------

**IV 10** Déterminer un pentagone convexe connaissant les milieux des côtés.

-----------------------------------------

**IV 11** Un canadair part d'un aérodrome A, doit faire le plein d'eau sur une distance L d'une droite D ne passant pas par A avant d'aller éteindre un incendie en I du même côté de D que A . Optimiser géométriquement son trajet.

-----------------------------------------

**IV 12** $$ Dans « L*es étoiles de Compostelle* » on trouve la construction suivante utilisée par les bâtisseurs de cathédrales pour obtenir un pentagone régulier : à partir d'un carré ABCD un arc de cercle de centre D passant par B coupe DC en O (C entre D et O), OA coupe BD en F. Un arc de cercle de centre O passant par F coupe CD en E. On reporte la longueur EF sur FA et ED pour obtenir G et I. Alors GFEI sont 4 sommets du pentagone qu'il suffit de compléter.
Qu'en pensez-vous ?

---

**IV 13** $$ ***Asterix contre Victor Hugo.*** Une faucille est assimilée à une lunule limitée par 2 cercles de centres O et O' de rayons r et r' (r<r') tangents en I . Montrer que pour que le centre de gravité de la faucille soit le point A diamétralement opposé à I sur le cercle de centre O , il faut que le rapport des rayons des 2 cercles soit le nombre d'or. (*Astérix et la serpe d'or).*
*Et Booz se demandait , quel Dieu , quel moissonneur de l'éternel été , avait en s'en allant négligemment jeté cette faucille d'or au milieu des étoiles ( V. Hugo ).*

---

**IV 14** Un menuisier doit construire une table de bridge rectangulaire formée de 2 plateaux ABCD et AB'C'D pouvant se replier selon une charnière AD . On doit pouvoir faire pivoter ABCD de 90° autour d'un point Ω, de manière que la table pliée ABCD et la table dépliée BB'C'C aient le même centre O. Déterminer la position de Ω .

---

**IV 15** Un voyageur assis dans un train regarde par la fenêtre. Il voit un poteau situé à 20 mètres de la voie traverser la fenêtre en 1 seconde tandis que la maison située à 500 mètres est visible pendant 24 secondes. Quelle est la vitesse du train ? (la fenêtre fait 1 mètre de large).

---

**IV 16** $ Le servant d'une batterie de missiles sol-air située en B voit arriver un avion ennemi sur une trajectoire rectiligne D. L'avion est en A quand il lance son missile qui va 3 fois plus vite que l'avion. Où aura lieu l'impact et quel doit donc être l'angle de tir entre la trajectoire du missile et celle de l'avion ?

---

**IV 17 $** ***Le théorème de Platini.*** Un coup-franc devant être tiré d'un point sur la ligne de touche, a quel endroit doit se placer Michel pour avoir la meilleure chance de marquer le but ?

---

**IV 18 **** ***Réciprocité barycentrique.*** Soit un triangle ABC , 3 points A'B'C' sur les côtés BC,CA,AB (différents des sommets) tels que AA', BB', CC' soient concourantes en G' On appelle A'', B'', C'' les symétriques de A', B', C' par rapport aux milieux des côtés et on se propose de montrer que AA'', BB'', CC'' sont parallèles ou concourantes en un point G'' .
Pour cela on considère G'=Bar[(A,a)(B,b)(C,c)]

Montrer que AA'', BB'', CC'' sont parallèles si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ (cas 1)

Montrer que sinon G'' = Bar[(A, $\frac{1}{a}$)(B, $\frac{1}{b}$)(C, $\frac{1}{c}$)] (cas 2)

---

**IV 19** ***Gergonne, Nagel, Heron etc.*** On appelle U',V',W' les points où les cercles exinscrits dans les angles A,B,C d'un triangle ABC sont tangents aux côtés BC, CA, AB .Déterminer BU' et CU' en fonction des longueurs a, b, c des côtés BC, CA, AB (on pourra poser p pour le demi périmètre du triangle). En déduire que les droites AU', BV', et CW' sont concourantes en un point N (point de Nagel) barycentre de A, B, C avec des coefficients qu'on précisera. Montrer que le centre I du cercle inscrit est barycentre de (A, a)(B, b)(C, c) et en déduire que N, I et le centre de gravité sont alignés. Le cercle inscrit étant tangent à BC, CA, AB aux points U, V, W , montrer que ces points sont symétriques de U', V', W' par rapport aux milieux des côtés et en déduire que AU, BV, CW sont concourantes en un point K (point de Gergonne ).

En appelant S l'aire de ABC, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A, établir les formules de Heron : S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , r = $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

R = $\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

------------------------------------------

**IV 20** Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque. On divise ses côtés (AB) (BC) (CD) (DA) en trois parties égales pour obtenir les points GH, IJ, KL, EF et on appelle OPQR les intersections de (FI) et (GL), de (HK) et (FI) , de (HK) et (EJ) , de (EJ) et (GL).

Montrer que $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

------------------------------------------

**IV 21** ***Le puzzle de Mikuzinski.*** Dans un triangle ABC on définit A',B',C' par $\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ , $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ , $\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ . BB' et CC' se coupent en R, CC' et AA' en P, AA' et BB' en Q. Déterminer les coefficients a;b;c pour que P soit barycentre de (A; a) (B; b) (C; c) . Procéder de même pour Q et R. En déduire que ABC et PQR ont même centre de gravité. Comparer $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ; $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ . (on admettra les résultats similaires pour $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BQ}$; pour $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CR}$ ) . Montrer que l'aire de ABC est 7 fois celle de PQR.

------------------------------------------

**IV 22 ***** ***Le théorème de Desargues.*** $D_1$, $D_2$, $D_3$ sont 3 droites concourantes en I. A et A' sur $D_1$, B et B' sur $D_2$, C et C' sur $D_3$. On suppose que ABC et A'B'C' sont des triangles et que BC et B'C' se coupent en A'', CA et C'A' en B'', AB et A'B' en C''. Montrer que A'' B'' C'' sont alignés.

------------------------------------------

**IV 23 ***** ***Le point de Lemoine.*** Etant donné un triangle ABC , on note a,b,c les longueurs BC , CA, AB et on appelle L ( point de Lemoine ) le barycentre de (A, $a^2$) , (B ,$b^2$ ) , (C , $c^2$) On note k = $a^2+b^2+c^2$

1) On appelle A',B',C' les milieux de BC , CA , AB , $AA_1$, $BB_1$ , $CC_1$ les hauteurs du triangle ABC et A '' B'' C'' les milieux de $AA_1$ , $BB_1$ , $CC_1$ . Montrer que $A_1$ est le barycentre de (B, $a^2+b^2-c^2$ ) et (C , $a^2+c^2-b^2$ ).
En déduire que $2a^2$ ( $\overrightarrow{LA}$ +$\overrightarrow{LA_1}$ ) = $(a^2-b^2-c^2)$( $\overrightarrow{LB}$ + $\overrightarrow{LC}$ ) puis que A'A''; B'B'' , C'C'' sont concourantes en L.
2) On appelle $L_1$,$L_2$,$L_3$ les projections de L sur BC,CA,AB et S l'aire de ABC

Montrer que $\overrightarrow{LL_1} = \dfrac{2a^2\overrightarrow{A''A_1}}{k}$ et $LL_1 = \dfrac{2aS}{k}$

On construit alors à l'extérieur de ABC les carrés BCDE , CAFN , ABPQ et on appelle $B_2$ l'intersection de DE et PQ , $C_2$ celle de FN et DE , $A_2$ celle de PQ et FN .Montrer que $A_2B_2C_2$ est homothétique de ABC et en déduire que $AA_2$,$BB_2$,$CC_2$ sont concourantes en L *( théorème de **GREBE** )*
3) On appelle G le centre de gravité de ABC et I le centre du cercle inscrit ; calculer les cosinus de $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AL})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC})}$ et en déduire que les symédianes (*symétriques des médianes par rapport aux bissectrices* ) sont concourantes en L.
4) Soit M barycentre de (A,$\alpha$) (B,$\beta$) (C,$\chi$) les 3 coefficients étant positifs de somme $\lambda$ .

Montrer que l'aire de MBC est $\frac{\alpha S}{\lambda}$, que les distances de M aux côtés de ABC sont proportionnelles à $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\chi}{c}$ et en utilisant l'identité (remarquable !)

$$k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) = (x+y+z)^2 + \left(\frac{xb}{a}-\frac{ya}{b}\right)^2 + \left(\frac{xc}{a}-\frac{za}{c}\right)^2 \ \left(\frac{yc}{b}-\frac{zb}{c}\right)^2$$

avec $x = ad_1$, $y=bd_2$, $z=cd_3$ ($d_1$, $d_2$, $d_3$ distances de M aux côtés BC, CA, AB), montrer que la somme des carrés des distances de M aux côtés du triangle est minimale si M est en L.

------------------------------------------

**IV 24 *** ***Le théorème de Morley***

ABC est un triangle direct;$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 3a$; $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = 3b$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 3c$

On construit les points P et S tels que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}}) = (\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BS}}) = a$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CS}}) = (\widehat{\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CP}}) = b$ puis on place Q et R sur (CS) et (BS) tels que $(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PS}}) = (\widehat{\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}}) = \frac{\pi}{6}$ et on appelle T et U les symétriques de P par rapport à (BS) et (CS)

Montrer que PQR est équilatéral. Déterminer la mesure des angles $\widehat{TRQ}$ et $\widehat{RQU}$.

Montrer que TRQUA sont cocycliques et en déduire le théorème de Morley.

(*Si dans un triangle on partage chaque angle en trois par des demi-droites issues du sommet, les 6 demi-droites 2 à 2 adjacentes à un même côté se coupent suivant un triangle équilatéral).*

------------------------------------------

**IV 25 ***** ***Le problème de Napoléon.***

Déterminer le centre d'un cercle en utilisant uniquement un compas.

------------------------------------------

**IV 26*** ***La transformation de Joukowski.***

T est la transformation qui à un point M d'affixe z associe le point M' d 'affixe $Z = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

Quels sont les points invariants ? Quelle est l'image de l'ensemble des points d'affixe réelle ? imaginaire ?

On considère z sous forme trigonométrique $z = r\,e^{ia}$, l'argument a variant de 0 à $2\pi$.

Quelle est l'image de l'ensemble des points de module 1 ? de module $r \neq 1$ (on comparera les ensembles obtenus pour r et 1/r).

Quelle est l'image de l'ensemble des points d'argument a (on comparera les ensembles obtenus pour a et $a+\pi$).

Déterminer l'image du domaine défini par $2 < r < 3$ et $\frac{\pi}{6} < a < \frac{2\pi}{3}$.

------------------------------------------

**IV 27** Soit un point F d'affixe a non réelle. C est le cercle de centre O passant par F et H l'ensemble des points dont la distance à F est 2 fois la distance à l'axe des ordonnées. Montrer qu'il y a dans l'intersection de C et H 3 points formant un triangle équilatéral.

------------------------------------------

**IV 28** ***Le problème de Fagnano.*** Déterminer 3 points P, Q, R sur les côtés d'un triangle de façon que le triangle PQR ait un périmètre minimum.

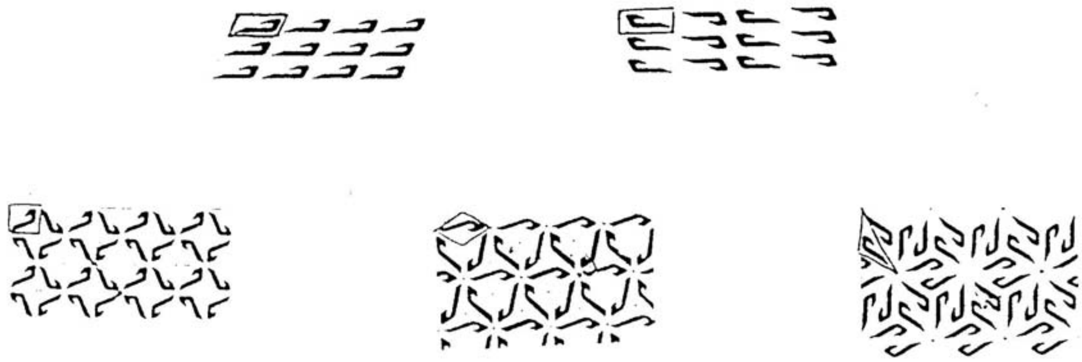
------------------------------------------

**IV 29** ***Frises.*** On appelle frise la reproduction dans une bande d'un motif par des translations successives dont le vecteur est sur l'axe de la bande. En étudiant l'invariance d'une frise par demi-tour, symétrie d'axe perpendiculaire à la bande ou symétrie par rapport à l'axe de la bande, montrer qu'il existe 7 sortes de frises.

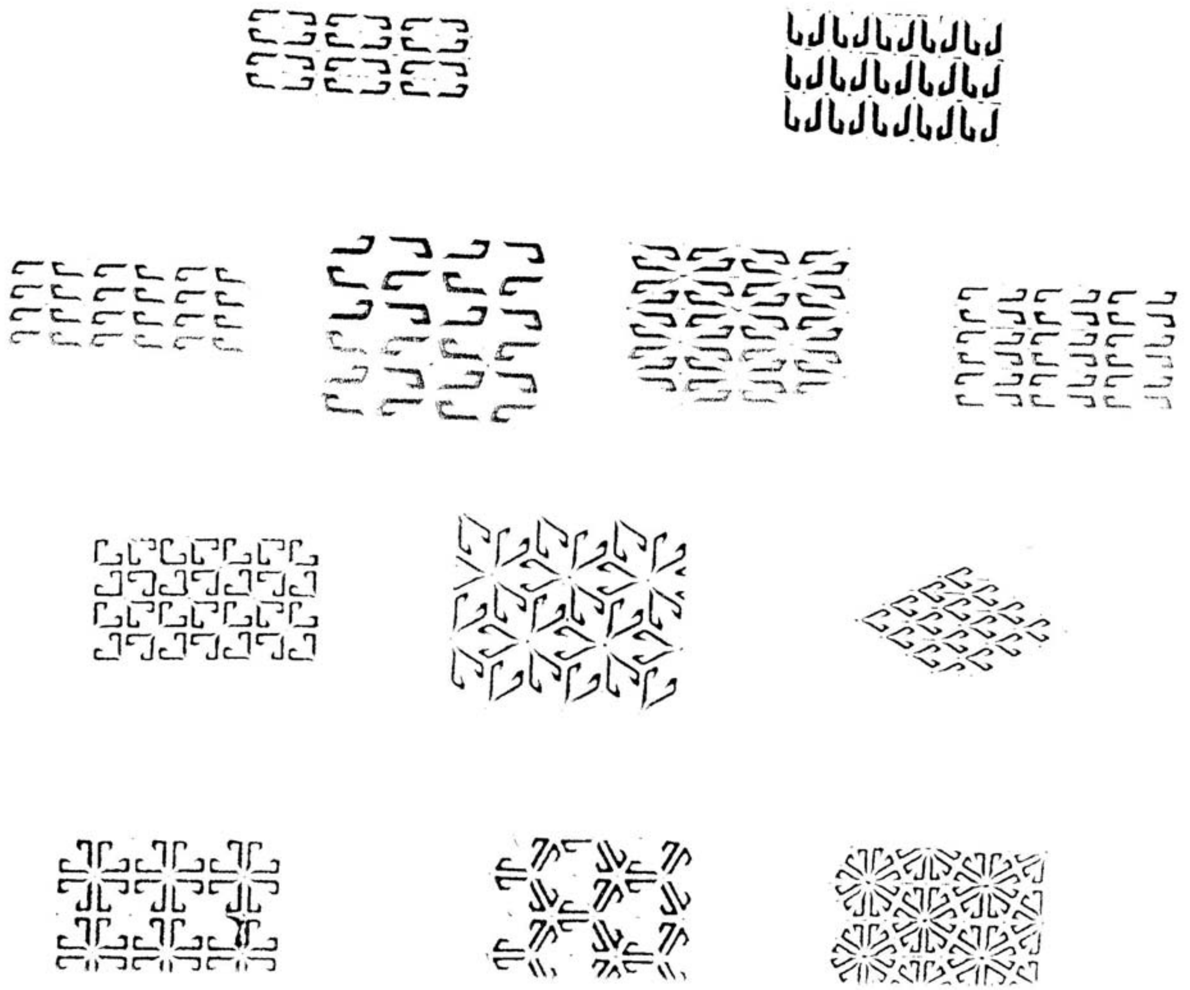
------------------------------------------

**IV 30*** *Pavages.*** On peut montrer de la même manière qu'il y a 17 sortes de pavages du plan

avec des isométries positives seulement



avec des isométries positives ou négatives



**IV 31 *** ***Le point de Fermat.*** Montrer que 3 points d'affixes $z_1$, $z_2$, $z_3$ appartiennent à la même demi-droite d'origine O si et seulement si $|z_1+z_2+z_3| = |z_1|+|z_2|+|z_3|$.
Montrer que les 3 points sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si et seulement si $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ et $z_1+z_2+z_3 = 0$.

Soient 3 points ABC d 'affixes a;b;c et on pose $a' = \dfrac{a}{|a|}$; idem pour b' et c' et on suppose que $a'+b'+c' = 0$. Soit $S = \overline{a'}\ (z - a) + \overline{b'}\ (z - b) + \overline{c'}\ (z - c)$. Montrer que S est indépendant de z et en déduire que : $|a| + |b| + |c| \leq |z - a| + |z-b| + |z-c|$ ; l'égalité n'ayant lieu que si et seulement si : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AM})} = \widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM})} = \widehat{(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CM})}$, ce qui n'a lieu que si M = O.
Etant donné un triangle ABC déterminer le point dont la somme des distances à A, B, C est minimale.

# V RECREATIONS

**V 1** Sur le rayon de ma bibliothèque est rangée une encyclopédie en 12 volumes. Chaque volume a une épaisseur totale de 4 cm, ceci incluant 1 mm pour les 2 couvertures. Il n'y a pas d'espace entre les livres. Quelle est la distance entre la première page du tome 1 et la dernière page du tome 12 ?

-----------------------------------------

**V 2** $ Un bon clochard fait une cigarette en récupérant le tabac de 3 mégots. Combien peut-il fumer de cigarettes s'il a ramené 12 mégots ?

-----------------------------------------

**V 3** Si une poule et demi pond un œuf et demi en un jour et demi, combien d'œufs pondront 9 poules en 9 jours ?

-----------------------------------------

**V 4** Une fermière va au marché avec un panier d'œufs. Elle vend au premier client la moitié de son panier plus la moitié d'un œuf, au 2° client la moitié de ce qu'il lui reste plus la moitié d'un œuf, et ainsi de suite à 10 clients. Son panier est vide. Combien avait-elle d'œufs ?

-----------------------------------------

**V 5** Si on vous demandait de choisir entre une augmentation de salaire de 10000 francs tous les ans ou de 200 francs tous les mois ? ? ?

-----------------------------------------

**V 6 $$** Un ethnologue étudie le langage de la peuplade primitive des Téhèces . Ce langage se réduit à 2 mots : BOF et EUH qui veulent dire oui et non, mais il ne sait pas encore dans quel ordre. Il décide d'interroger un spécimen de cette peuplade qui comporte hélas un certain nombre de menteurs. Quelle question doit il poser pour savoir comment se dit oui ? ? Qui est un menteur ?

-----------------------------------------

**V 7** Le facteur apporte une lettre à une dame qui lui dit « J'ai 3 filles, le produit de leurs âges est 36 et la somme de ces âges est égale au numéro de la porte d'en face .Pouvez vous trouver ces âges ? » Le facteur se retourne, réfléchit et dit : « Il me manque un renseignement. » « J'ai oublié de vous dire que l'aînée est blonde » ajoute la dame. Les âges étant des nombres entiers déterminer ces âges.

-----------------------------------------

**V 8** Un nageur plonge d'un pont et remonte le courant. Au même moment un piéton qui passait sur le pont perd son chapeau. Après 10 minutes le nageur fait demi-tour. Il rattrape le chapeau à 1000 mètres du pont. Quelle est la vitesse du courant ?

-----------------------------------------

**V 9** ** ***Les bœufs de Newton.*** 70 vaches mangeraient l'herbe d'un pré en 24 jours, alors que 30 vaches mangeraient l'herbe de ce même pré en 60 jours. Combien faudrait il de vaches pour manger l'herbe de ce pré en 96 jours ?

-----------------------------------------

**V 10** $ Un chasseur aperçoit un ours à100 mètres à l'est. Il court 100 mètres vers le nord récupérer son fusil, se retourne, tire vers le sud …et tue l'ours. Sachant que l'ours n'a pas bougé, déterminer la couleur de l'ours.

-----------------------------------------

**V 11** $ ***Compte de fées.*** Si on ajoute à l'âge de Blanche-Neige quatre fois son carré on obtient l'âge de Barbe-Bleue. Quel est l'âge de Blanche-Neige ?

-----------------------------------------

**V 12** On a disposé sur une piste 12 fanions régulièrement espacés. Un coureur, à vitesse constante met 8 secondes pour aller du premier au huitième fanion. Combien mettra-t-il de temps pour parcourir la distance entre le premier et le douzième fanion ?

-----------------------------------------

**V 13** Un ami m'a dit : « Deux de mes enfants s'appellent Dominique et Claude ; or Dominique a autant de frères que de sœurs alors que Claude a 2 fois plus de sœurs que de frères ». Combien cet ami a-t-il d'enfants ?

------------------------------------------

**V 14** $$ Le professeur : « Voulez-vous résoudre (x+5)(3 – x) = 7 ». L'élève : « Il y a 2 cas : ou bien x+5=7 donc x=2, ou bien 3-x=7 et x= -4 ». Le professeur : « Ce que vous faites n'a aucun sens ! ». L'élève : « J'ai vérifié : les solutions sont justes ». Le professeur : « C'est un coup de chance, cela ne conviendrait pas à un autre exemple ! ». L'élève : « Poincaré n'a-t-il pas dit, dans Science et hypothèses en 1902, qu'il fallait, à chaque cas, adapter la méthode ? ».

------------------------------------------

**V 15** $ ***Sophisme.*** Trois voyageurs arrivant dans un hôtel prennent une chambre pour 3 qu'ils payent 300 francs (100 F chacun) L'hôtelier s'apercevant que la chambre ne coûte que 250 F charge le garçon d'étage de rapporter 50 F aux voyageurs. Le garçon d'étage se dit que 50 n'est pas divisible par 3 , décide de garder 20 F et ne rend que 30 F aux clients. Chaque client a donc dépensé 90 F et le garçon d'étage a gardé 20 F ce qui fait 290 F et il y avait 300 F au départ. Où sont les 10 francs qui manquent ?

------------------------------------------

**V 16** ***Etonnez vos élèves.*** Dites : prenez un nombre de 2 chiffres, multipliez par 2, ajoutez 5 multipliez par 50, ajoutez un autre nombre de 2 chiffres retranchez 365 et donnez moi le résultat, je vous dirai les 2 nombres que vous avez choisi ;si vous trichez je m'en apercevrai.

------------------------------------------

**V 17** 2 bateaux évoluent sur un lac. Ils partent simultanément des 2 rives opposées A et B, se croisent une première fois à 500 mètres de A, font demi-tour au bout du lac et se recroisent à 300 mètres de B. Quelle est la longueur du lac ?

------------------------------------------

**V 18** *** ***Casse-tête.*** 5 amis aux noms prédestinés Mrs Biche, Cerf, Lièvre, Sanglier et Chevreuil reviennent d'une partie de chasse. Ils ont ramené 5 animaux correspondant à leurs noms. Chacun a tué un animal différent de son nom, et a aussi raté un animal différent de celui qu'il a tué et ne correspondant pas non plus a son nom. Sachant que le cerf a été tué par le chasseur qui a le nom du gibier raté par Mr Chevreuil, que la biche a été tuée par celui qui a le nom du gibier raté par Mr Lièvre et que Mr Cerf a tué un lièvre et raté un chevreuil, retrouvez les bêtes tuées et ratées par chacun des chasseurs.

------------------------------------------

**V 19** $$ ***Conte de Noël.*** Un mathématicien se trouve dans le désert. Il n'a qu'un fusil et 2 cartouches et pourtant bien envie de fumer la pipe. Il se met donc à l'affût et attend que passe une panthère. Il vise, il tire et il la loupe. Il ramasse la loupe et la met dans sa poche pour une utilisation ultérieure. Il tire de nouveau et tue la panthère. Il prend alors la panthère par la queue et lui fait faire des moulinets au-dessus de sa tête. Comme il est mathématicien, il calcule la distance parcourue à chaque tour par les moustaches de la panthère. Vous savez tous que la circonférence est $2\pi$ R et ici le rayon étant la panthère, il obtient 2 pi-panthère ! Il garde une des pipes en terre et écrase l'autre avec un caillou, puis il fait avec la terre 2 tas : un tas haut et un tas bas. Il met le tabac dans la pipe en terre restante et l'allume en concentrant les rayons du soleil avec la loupe !

------------------------------------------

**V 20** $ Un artisan qui doit remplacer une pièce triangulaire s'aperçoit qu'il a peint l'envers. Il n'a pas d'autre .pièce et n'a plus de peinture. Que fait-il ?

------------------------------------------

**V 21** 4 personnes doivent traverser un pont, de nuit, et n'ont qu'une lampe électrique. Elles mettent respectivement 1 mn, 2 mn, 5 mn, et 10 mn pour traverser le pont. Le pont ne permet que le passage de 2 personnes en même temps et il faut à chaque fois que quelqu'un ramène la lampe. Quel temps minimum faudra-t-il pour qu'ils aient traversé tous les quatre ?

**V 22** $$ ***Le père Noël existe-t-il ? Etude scientifique.***

Il y a approximativement deux milliards d'enfants de moins de 18 ans sur terre . Cependant, comme le Père Noël ne visite pas les enfants Musulmans, Hindous, Juifs ou Bouddhistes, sauf peut-être au Japon, ceci réduit la marge de travail pour la nuit de Noël à 15% du total, soit 378 millions. En comptant une moyenne de 3,5 enfants par foyer, cela revient à 108 millions de maisons, en présumant que chacune comprend au moins un enfant sage. Le Père Noël dispose d'environ 31 heures de labeur dans la nuit de Noël, grâce aux différents fuseaux horaires et à la rotation de la terre, dans l'hypothèse qu'il voyage d'Est en Ouest, ce qui paraît d'ailleurs logique. Ceci revient à 967,7 visites par seconde. Cela signifie que pour chaque foyer Chrétien contenant au moins un enfant sage, le Père Noël dispose d'environ un millième de seconde pour parquer le traîneau, sauter au dehors, dégringoler dans la cheminée, remplir les chaussettes distribuer le reste des présents au pied du sapin, déguster les quelques friandises laissées à son intention, regrimper dans la cheminée, enfourcher le traîneau et passer à la maison suivante.

En supposant que chacune de ces 108 millions d'arrêts sont distribués uniformément à la surface de la terre, hypothèse que nous savons fausse bien sur mais que nous accepterons en première approximation, nous devons compter sur environ 1,4 kilomètre pat trajet. Ceci signifie un voyage total de plus de 150 millions de kilomètres, sans compter les détours pour ravitailler ou faire pipi. Le traîneau du Père Noël se déplace donc à 1170 kilomètres par seconde soit 3000 fois la vitesse du son. A titre de comparaison, le véhicule le plus rapide fabriqué par l'homme, la sonde spatiale Ulysse, se traîne à 49 kilomètres par seconde, et un renne moyen peut courir, au mieux de sa forme, à 27 kilomètres à l'heure.

La charge utile du traîneau constitue également un élément intéressant. En supposant que chaque enfant ne reçoit rien de plus qu'une boite de Lego moyenne ( un kilo ), le traîneau supporte plus de 500 000 tonnes, sans compter le poids du Père Noël lui-même. Sur Terre, un renne conventionnel ne peut tirer plus de 150 kilos. Même en supposant que le « renne volant » soit 10 fois plus performant, le boulot du Père Noël ne pourrait jamais s'accomplir avec 8 ou 9 bestiaux, il lui en faudrait 360 000. Ce qui alourdit la charge utile, abstraction faite du poids des traîneaux, de 54 000 tonnes supplémentaires, nous conduisant tout bonnement à 7 fois le poids du Prince Albert ( le bateau, pas le monarque !).

600 000 tonnes voyageant à 1170 kilomètres par seconde créent une énorme résistance à l'air. Celle-ci ferait chauffer les rennes au même titre qu'un engin spatial rentrant dans l'atmosphère terrestre. Les deux rennes en tête du convoi absorberaient chacun une énergie calorifique de 14 300 millions de joules par seconde. En bref, ils flamberaient quasi instantanément, exposant da,ngereusement les deux rennes suivants. La meute entière de rennes serait complètement vaporisée en 4,26 millièmes de seconde, soit juste le temps pour le Père Noël d'atteindre la cinquième maison de sa tournée.

Pas de quoi s'en faire de toute façon, puisque le Père Noël, en passant de manière fulgurante de 0 à 1170 kilomètres par seconde en un millième de seconde serait sujet à des accélérations allant jusqu'à 17 500 g. Un Père Noël de 125 kilos ( ce qui semble ridiculement mince ) se retrouverait plaqué au fond du traîneau par une force de 2 157 507,5 kilos, écrabouillant instantanément ses os et ses organes et le réduisant à un petit tas de chair rose et tremblante.

**C'est pourquoi, si le Père Noël a jamais existé, il est mort maintenant.**

------------------------------------------

**V 23** * Sauriez-vous faire un triangle équilatéral à mains nues ? (sans règle ni compas ni crayon…!)

------------------------------------------

**V 24** $ ***Möbius.*** Vous connaissez sans doute le ruban de Möbius, mais si ce ruban a subi 2, 3, ou 4 torsions d'un demi-tour et que vous le coupez dans sa longueur soit en son milieu, soit au tiers de sa largeur, vous obtiendrez des résultats qui surprendront vos élèves.

**V 25** ** ***Casse-tête (bis).*** Cinq maisons alignées sont habitées par 5 personnes de nationalités différentes, de professions différentes, ayant chacune un animal favori et une boisson préférée. De plus les maisons sont de couleurs différentes. Retrouvez les habitants de chaque maison avec leurs activités et passe-temps à partir des données suivantes :
L'Anglais habite dans la maison rouge (1) Le chien appartient à l'Espagnol (2) On boit du café dans la maison verte (3) L'Ukrainien boit du thé (4) La maison verte est située à côté de la blanche et se trouve tout à fait à droite (5) Le sculpteur élève des escargots (6) Le diplomate habite la maison jaune (7) On boit du lait dans la maison du milieu (8) Le Norvégien habite la première maison à gauche (9) Le médecin habite la maison voisine de celle où demeure le propriétaire du renard (10) La maison du diplomate est à côté de celle où il y a le cheval (11) Le violoniste boit du jus d'orange (12) Le Japonais est acrobate (13) Le Norvégien habite à côté de la maison bleue (14) Il y a un zèbre et quelqu'un qui boit de l'eau. (15)

------------------------------------------

**V 26** * ***Soirée mondaine.*** 26 invités s 'ennuient. Alice ne connaît qu'une personne, Bertrand en connaît 2, Céline en connaît 3, et ainsi de suite jusqu'à Yolande qui connaît tout le monde. Mais combien Zinédine connaît-il de personnes dans cette soirée ?

------------------------------------------

**V 27** 47 convives, 28 hommes et 19 femmes sont attablés autour d'une table ronde. Il y a 11 hommes qui ont une femme à leur droite. Combien d'hommes ont une femme à leur gauche ?

------------------------------------------

**V 28** A une soirée où assistent 25 personnes, toutes les femmes se font la bise, les femmes font 2 bises à chaque homme sauf à leur compagnon à qui elles en font 4, et les hommes se serrent la main. Il y a eu 774 bises et 55 poignées de main. Combien y a-t-il de femmes seules ?

------------------------------------------

**V 29** ***L 'ascenseur.*** Aristide habite un immeuble dont le nombre d'étages est entre 3 et 25, sans sous-sol et possédant un unique ascenseur. On suppose que les allées et venues sont telles que lorsque l'appareil est à l'arrêt, il a une chance sur deux d'être au rez-de-chaussée et des probabilités égales d'être à chacun des étages. Lorsqu'en sortant de chez lui Aristide appelle l'ascenseur, l'appareil, qui est à l'arrêt, parcourt en moyenne 2 fois plus de distance que lorsqu'il l'appelle du rez-de-chaussée ou du premier. A quel étage habite-t-il ?

------------------------------------------

**V 30** ** Sur un livre de 1000 pages, chaque page contient une affirmation. Sur chaque page est écrit « Il y a exactement n affirmations fausses (n étant le numéro de la page). Combien y-a-t-il d'affirmations vraies ?

------------------------------------------

**V 31** $$ ***Le théorème de Dulles*** (patron de la CIA) On peut montrer par récurrence que si dans un groupe de n personnes il y a un communiste, alors toutes les personnes sont communistes.

------------------------------------------

**V 32** $ ***Sophisme (bis)*** Si $x^2+x+1=0$ il est clair que $x \neq 0$ On peut alors déduire successivement
$x^2 = -x - 1$ puis $x = \frac{-x-1}{x}$ ; $x^2 = \frac{x^2+2x+1}{x^2}$ ; $\frac{x^2+2x+1}{x^2} + x + 1 = 0$ ; $x^3 + 2x^2+2x+1=0$ et comme $x^2 = -x - 1$ il reste $x^3 - 1 = 0$ donc $x=1$ et en reportant dans l'équation initiale **3 = 0** !!!

------------------------------------------

**V 33** *** ***Casse tête*** Quatre couples doivent traverser une rivière où se trouve une île. La barque ne peut emporter que 2 personnes à la fois et aucune femme ne peut rester avec des hommes s'il n'y a pas son mari.

------------------------------------------

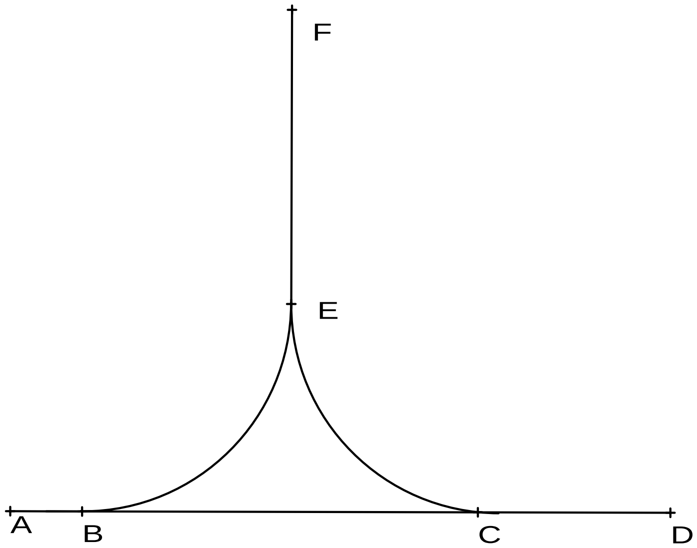
**V 34** ** ***Le paradoxe de Bolzano.*** On considère la somme infinie $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$ (série harmonique alternée) que l'on sépare en 2 parties A somme des termes positifs et B somme des termes précédés d'un signe moins. On peut alors dire que $S = A - B = (A + B) - 2B = 0$ puisque A+B et 2B sont toutes deux la somme des inverses de tous les entiers. Mais en groupant les termes 2 par 2 , S est une somme de termes strictement positifs donc $S > \frac{1}{2}$ et S=0 !!!

De plus en multipliant par 2 tous les termes de S et en les regroupant on peut écrire :

$2S = (2 - 1) - 2\frac{1}{4} + (\frac{2}{3} - \frac{2}{6}) - 2\frac{1}{8} + (\frac{2}{5} - \frac{2}{10})\ldots$.ce qui redonne 2S = S !

-----------------------------------------

**V 35** ***casse tête*** (encore)




Une locomotive se trouve sur le segment BC
Elle mesure 10 mètres. Elle doit accrocher 2 wagons de 5 mètres se trouvant l'un sur l'arc BE, l'autre sur l'arc CE, puis repartir vers F
Comment faire car AB mesure 5 mètres et CD 15 mètres.

**V 36** Calculer $116415321826934814453125 \times 8589934592$

-----------------------------------------

**V 37** ***

Reconstituer cette division exacte à la quatrième décimale et dont tous les chiffres ont été effacés.

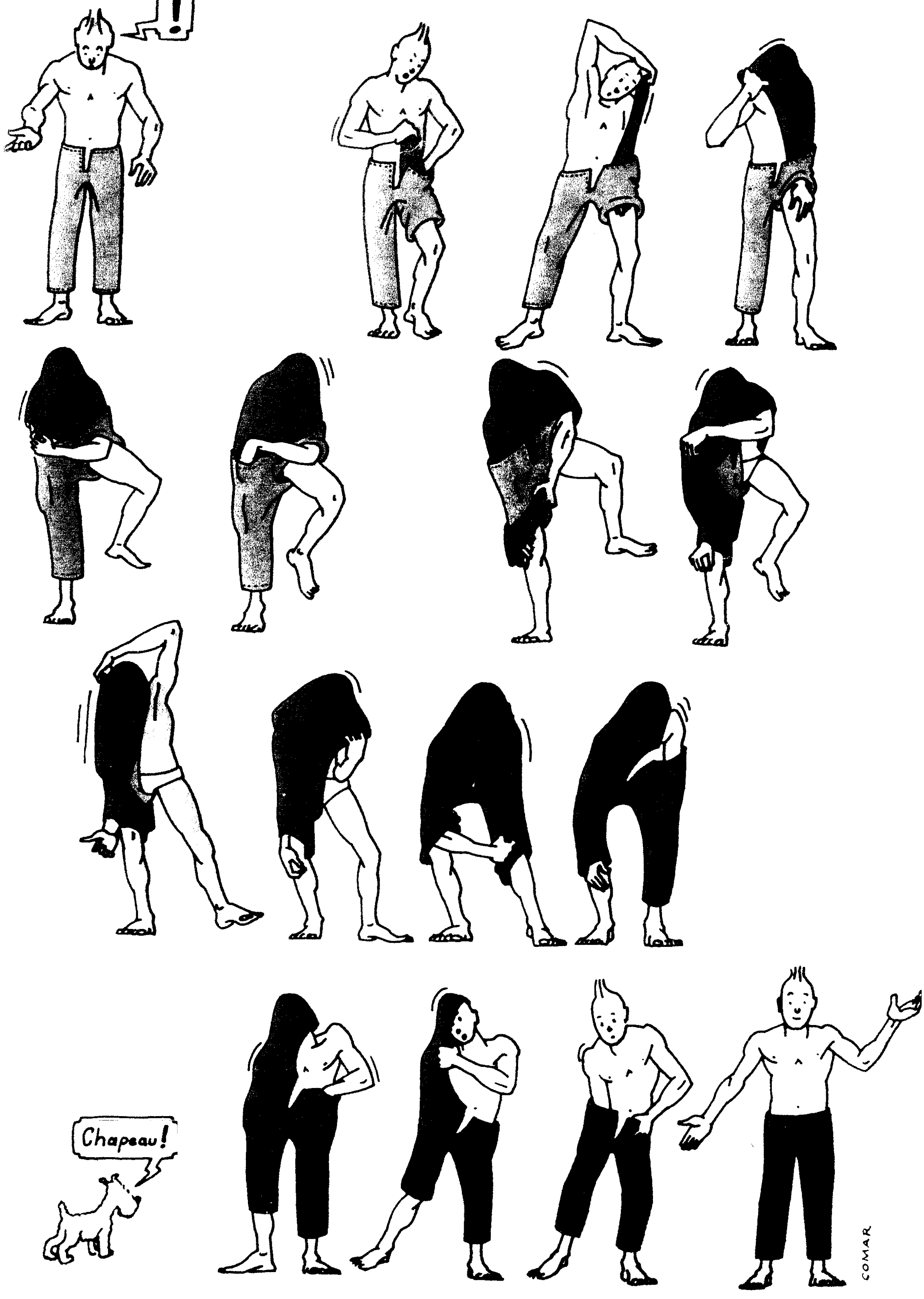
| | |
|---|---|
| * * * * * * | * * * |
| * * * | * * * * , * * * * |
| * * * | |
| * * * | |
| * * * | |
| * * * | |
| * * * | |
| * * * | |
| * * * * | |
| * * * * | |
| 0 | |

-----------------------------------------

**V 38** $$ Marinette a demandé à son grand-père de déterminer lequel des 3 interrupteurs allume au grenier(les 2 autres ne servent à rien). Papi qui est fatigué n'a pas envie de monter plusieurs fois au grenier. Comment fait-il pour trouver le bon interrupteur en un seul voyage ?

-----------------------------------------

**V 39** *** $$ **Topologie.** Savez vous qu'il est possible de retirer un gilet boutonné sans enlever la veste ou de retourner son pantalon sans l'enlever !!



**V 40** $$ Mac Gyver joue au ping-pong dans un grenier quand soudain la balle tombe dans un tuyau de plomb qui sort du béton de 20 cm et qui est à peine plus large que la balle. Mac Gyver est très débrouillard et a sur lui un trombone, un aimant, un bout de ficelle, un miroir et un couteau. Comment fait-il pour récupérer la balle ?

------------------------------------------

**V 41** Chaque jour, et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après 15 jours il ne reste plus qu'un mouton, et aucun autre animal. Combien y avait-il d'animaux au départ.

------------------------------------------

**V 42** Un fort carré est défendu par 40 soldats. Ils subissent 4 assauts au cours desquels il y a à chaque fois 4 tués et il y a encore 2 tués au cinquième assaut. Pourtant il y a toujours 11 défenseurs sur chaque côté du fort. Expliquez pourquoi.

------------------------------------------

**V 43** Combien y a-t-il de manières de mettre 10 pièces de monnaie dans 3 tasses de manière que chaque tasse contienne un nombre impair de pièces ?

------------------------------------------

**V 44** ** Si, à la fin du repas il y a 129 miettes sur une table carrée de côté 1 mètre, montrer qu'il y a nécessairement 3 miettes formant un triangle de moins de 80 centimètres carrés.

------------------------------------------

**V 45** *** Comment choisir 4 poids entiers pour pouvoir peser tous les poids entiers de 1 à 40 grammes sur une balance Roberval ?

------------------------------------------

**V 46** $ ***Calendrier.*** Expliquez pourquoi Sainte Thérèse d'Avila est morte dans la nuit du 4 au 15 octobre 1582 et comment Shakespeare et Cervantès ont pu mourir tous les 2 le 22 avril 1616 à 10 jours d'intervalle !

------------------------------------------

**V 47** ***Paradoxe.*** Plus on achète de gruyère, plus il y a de trous, et plus il y a de trous moins il y a de gruyère, donc plus on achète de gruyère moins on en a !

------------------------------------------

**V 48** *** On peut écrire n'importe quel entier en utilisant 3 fois le chiffre 2 et aucun autre !

------------------------------------------

**V 49** Les concombres contiennent naturellement 99% d'eau. On entrepose 500 kg de concombres jusqu'à ce qu'ils ne contiennent plus que 98% d'eau. Quel poids reste-t-il ?

------------------------------------------

# INDICATIONS ET COMMENTAIRES

**I.1** Comparer le rectangle de côtés a, b et celui de côtés a-2, b-2.

**I.4** Si n est le nombre de moutons et r le reste de la division de n par 10, $r^2$ ayant un nombre impair de dizaines a nécessairement 6 comme chiffre des unités.

**I.5** L'un des nombres premiers est nécessairement 2.

**I.6** La décomposition en facteurs premiers indique que le dernier jour est le 29.L'année étant bissextile c'est le 29/02/1916 qu'a eu lieu cette découverte.

**I.8** Travailler modulo 11.

**I.9** $1987 + 81 + 81 = 2149$ $94851 + 6483 + 6483 = 107817$
$29786 + 850 + 850 = 31486$ $5483 + 2384 = 7867$ $170469 \times 5 = 852345$

**I.10** Il n'y a que 14 nombres premiers inférieurs à la racine carrée de 2001.

**I.12** (*théorème chinois*) Par congruences ou en utilisant 3 résolutions d'équations de Bezout, on aboutit au nombre 1183 modulo 3366.

**I.13** Il y a nécessairement 2 nombres qui s'écrivent uniquement avec des 1 et qui ont le même reste dans la division par n ; leur différence est solution.
Il y a 2 nombres de la forme $10^p - 1$ qui ont même reste dans la division par 9n, donc 9n divise leur différence et est premier avec les puissances de 10.

**I.14** Si p est le nombre de 5 chiffres égal à la période, pn = 99999 et n = 41.

**I.15** Si n = a+b et si n divise ab, tout facteur premier de n est aussi dans a et dans b ; donc si les facteurs premiers sont distincts, n divise a et b donc ne peut être égal à leur somme.
Si $n = kp^2$, on pose p = q+q' et on prend a = kqp et b = kq'p .

**I.16** Envisager les triplets pythagoriciens inférieurs à 76 (âge d'Einstein à sa mort) ; il n'y a que 2 cas donnant une même hypoténuse et empêchant Einstein de conclure.

**I.17** Envisager les facteurs premiers dans b et montrer qu'ils sont dans a, avec un exposant pair.

**I.18** n se termine par 5 ou 6. Si $u_n$ est un nombre de n chiffres se terminant par 6, on doit avoir $u_n^2 = p\times10^n+u_n$ . Si a est le premier chiffre non nul de p et que a est au rang k dans p , on pose $u_{n+k}= x\ 10^{n+k}+u_n$ . Alors en égalant les coefficients de $10^{n+k}$ dans $u_{n+k}$ et dans $u_{n+k}^2$ on a $x=10 - a$.
(On trouve ainsi par exemple 2 nombres de 7 chiffres : 7109376 et 2890625).

**I.19** $n< (4,5)^{3\times1500}\times(10)^{3\times4500} < 10^{16500}$ donc $a < 9\times16500 = 148500$, donc $b < 45$ puis $c < 12$.
Comme on nombre est, modulo 9, congru à la somme de ses chiffres et que n est congru à 7 on a donc c=7.

**I.20** Soit b l'âge du père, a l'âge de la fille médiane et r la raison de la suite : $b^2 = 9a^2 + 60r^2$ donc b est divisible par 3 et r aussi. On pose r = 3x et il n'y a que 2 solutions : a=14, b=48 (avec r =3) ou a=28, b=96 (avec r=6).

**I.21** Considérons les 4 propriétés suivantes que l'on peut montrer par récurrence :
Si n= $2^k$ le dernier restant est $2^k$ si on commence à éliminer les impairs **($H_1$)** et 1 si on commence par les pairs **($H'_1$)** ; si n = $2^k$- a avec $0 < a < 2^{k-1}$ alors le dernier sera $2^k$- 2a si on commence par les impairs **($H_2$)** ou $2^k$- 2a +1 si on commence par les pairs **($H'_2$).**

*Remarque : si on ne considère que le cas élimination à partir du premier, écrire que :*

$$n = 2^k - a$$

*signifie que l'écriture binaire de n contient k chiffres et que :*

$$2^k - 2a = 2^k - 2(2^k - n) = 2(n - 2^k)$$

*qui est obtenu en binaire en prenant l'écriture de n , en enlevant un 1 à gauche et en mettant un 0 à droite ( recette non valable si n est une puissance de 2) .*
*Par exemple, si n=1993 qui s'écrit en binaire 11111001001 le dernier sera celui qui s'écrit 11110010010 en binaire, c'est à dire 1938.*

**I.22** Si $x \in E_n$, $y=n-x \in E_n$ et $y \neq x$ , donc $E_n=\{x_1,\ldots,x_{\varphi(n)}\}=\{y_1,\ldots,y_{\varphi(n)}\}$ et en ajoutant les 2 familles $2S = (x_1 +y_1) +\ldots+(x_{\varphi(n)} +y_{\varphi(n)}) = n\,\varphi(n)$ donc $S = \frac{1}{2} n\,\varphi(n)$.
Si p est premier les entiers de $E_{p^\alpha}$ sont tous les nombres inférieurs à $p^\alpha$ (au nombre de $p^\alpha$ -1) dont il faut retirer les multiples de p (au nombre de $p^{\alpha-1}$ –1), ; il en reste donc bien $p^{\alpha-1}$ (p-1) .
D'après le théorème de BEZOUT, (m,n), (m,v), (u,n), (u,v) sont des couples d'entiers premiers entre eux. Les divisions euclidiennes s'écrivent : $x=mq+\alpha$ et $x=nq'+\beta$.
En multipliant la première par vn et la seconde par um puis en ajoutant on obtient :
$(vn+um)x = x = vn\alpha+um\beta+mn(qv+q'u)$ et si on pose $x_0$ le reste de la division de $vn\alpha+um\beta$ par mn , c'est bien la seule solution au problème entre 0 et mn.
Si $(\alpha m)$ et $(\beta,n)$ sont premiers entre eux ,supposons que $x_0$ et mn aient un pgcd différent de 1, ce pgcd aurait un diviseur premier d qui , divisant $x_0$ et mn , diviserait aussi $vn\alpha+um\beta$.
d étant premier divise m ou n ; s'il divise m, il divise $um\beta$ donc aussi $vn\alpha$. Or cela est impossible car m étant premier avec n, avec v et avec $\alpha$ est premier avec leur produit , donc d ne peut diviser m et $vn\alpha$.(idem si on suppose que d divise n). En conclusion $x_0$ et mn sont premiers entre eux.
Réciproquement , si $x_0$ et mn sont premiers entre eux, et si d est un diviseur premier de m et $\alpha$, d divise $vn\alpha +um\beta$ ainsi que mn donc aussi $x_0$ , ce qui est impossible Donc m et $\alpha$ sont bien premiers entre eux (idem pour n et $\beta$).
La donnée d'un élément de $E_n$ et d'un élément de $E_m$ détermine un unique élément de $E_{mn}$ et réciproquement, ce qui est la définition d'une bijection et qui montre l'égalité du nombre d'éléments des 2 ensembles en bijection c'est à dire :
$\varphi(m)\times\varphi(n) = \varphi(mn)$ si m et n sont premiers entre eux.
$2000 =2^4\,5^3$ donc $\varphi(2000)=\varphi(16)\,\varphi(125) =8\times 100$ et la somme cherchée est $1000\times 800$.

**I.23** Le nombre de polygones de n côtés est 1/2 $\varphi$(n) (indicateur d'Euler).

**I.24** $\overline{bb}$ =11b et $\overline{aaaa}$ =1111a donc $11^2\ b^2 = 11\times 101$ a , ou encore $11\,b^2 = 101$ a.

11 étant premier avec 101 divise alors a (théorème de Gauss) ce qui est impossible car $0 < a < 10$

En base 41 : $\overline{bb} = 42b = 1218$ et $(\overline{bb})^2 = 1483524$ . Les divisions successives par 41 donnent $1483524 = 41 \times 36183 + 21$ , $36183 = 41 \times 882 + 21$ et $882 = 41 \times 21 + 21$ ce qui signifie que si a est le symbole de 21 en base 41, le nombre 1483524 s'écrit bien $\overline{aaaa}$ .

De manière plus générale $\overline{bb} = bx+b = b(x+1)$ et $\overline{aaaa} = ax^3+ax^2+ax+a = a(x+1)(x^2+1)$ donc $b^2(x+1) = a(x^2+1)$.

Si x est pair : $x=2p$ et $x^2+1 = 4p^2+1$ Or $4p^2+1 = (2p+1)(2p-1)+2$ donc d'après l'algorithme d'Euclide $(4p^2+1)\wedge(2p+1) = (2p+1)\wedge 2 = 1$ et selon le théorème de Gauss, 2p+1 divise a , ce qui est impossible avec $0 < a < 2p = x$ .

Si x est impair : $x = 2p+1$, on a alors $x+1 = 2(p+1)$ et $x^2+1 = 2(2p^2+2p+1)$ ce qui entraîne $b^2(p+1) = a(2p^2+2p+1)$ et comme $2p^2+2p+1 = 2p(p+1)+1$ c'est à dire que p+1 et $2p^2+2p+1$ sont premiers entre eux, on déduit de nouveau que p+1 divise a . Cette fois, $a=k(p+1)$ a une solution qui vérifie $0 < a < 2p+1 = x$ : c'est k=1, et on obtient bien $a=p+1$ et $b^2=2p^2+2p+1$. Si on prend alors $b=a+1$ on a : $2p^2+2p+1 = (p+2)^2$ équation dont la seule solution entière positive est p = 3 ce qui conduit à x = 7 , a = 4 , b = 5 .

Entre 0 et 20 on a 3 solutions : p=0, b=1 ; p=3, b=5 ; p=20 , b=29 . On a alors $u_3=119$ et $v_3=169$ qui sont aussi solutions de (E). Il est fastidieux mais guère difficile de vérifier par récurrence que les formules indiquées conviennent, par exemple pour la dernière relation :

$$(1+u_n)^2+u_n^2=1+2u_n+2u_n^2 = \frac{1+(3+2\sqrt{2})^{2n+1}+(3-2\sqrt{2})^{2n+1}}{8} = v_n^2$$

*On a donc une infinité de solutions au problème, mais on ne peut affirmer que ce sont les seules.*

**I.25** x et y sont premiers entre eux et si δ est un diviseur commun de x+y et x-y il divise aussi leur somme 2x et leur différence 2y donc c'est un diviseur du pgcd de 2x et 2y qui est 2 ; donc les seuls diviseurs communs possibles de x+y et x-y sont 1 et 2 et leur pgcd ne peut être que 1 ou 2 (1 si x et y sont de parité différente , 2 s'ils sont de même parité ).

Supposons que x+y et x-y soient premiers entre eux :

En reportant a = dx et b = dy dans l'égalité initiale on obtient $x+y = d(x-y)^2$ . On constate donc que x+y est un multiple de x-y et le pgcd de ces 2 nombres est donc x-y.

On a nécessairement x-y = 1 et x+y = d, d'où par soustraction d = 2y+1

En posant y=n on a alors : d=2n+1 et x = n+1 donc a = (n+1)(2n+1) et b = n(2n+1).

Supposons maintenant que le pgcd de x+y et x-y soit 2. On peut poser x+y = 2p et x-y = 2q.

En reportant de nouveau dans la relation initiale on obtient $p=2dq^2$ donc p est un multiple de q et comme précédemment, p et q étant premiers entre eux, on a nécessairement q=1 et p=2d ce qui donne x+y = 4d et x-y = 2 d'où x = 2d+1 et y = 2d-1, donc a = d(2d+1) et b = d(2d-1).

Dans le premier cas a = b+2n+1 et le reste de la division de a par b est 2n+1 donc impair.

Dans le deuxième cas a = b+2d et le reste de la division de a par b est 2d donc pair.

Le reste ne peut être 137 que dans le premier cas avec n=68 donc a=9384 et b=9248.

**I.26** Si k=0 , n'=0 ; si k=1 , a=b ;si $k \geq x$ ,n'=kn a au moins 3 chiffres ; tous ces cas étant impossibles, on a donc $2 \leq k \leq x-1$.

Comme n' = kn , bx+a = k(ax+b) donc bk = x(b-ak)+a . On a bk > b > a donc b-ak > 0

On pose b = ak+r , on a alors $r \geq 1$ , bk = rx+a , r < k et $rx = bk-a = (ak+r)k-a = a(k^2-1)+rk$

Connaissant a, k, r on prend b = ak+r , et si $a(k^2-1) = \lambda r$ , $x = k+\lambda$ donc $rx = (k^2-1)a+kr$.

$nr = r(ax+b) = a(bk-a)+r(ak+r) = a[(ak+r)k-a]+r(ak+r) = a^2(k^2-1)+2akr+r^2$.
$n'r = r(bx+a) = (ak+r)[(ak+r)k-a]+ra = knr$ donc $n' = kn$ et n est un codiviseur.
$r'(x+1) = (k+1)[(k-1)a+r] = (k+1)(b-a)$ . Si x+1 est premier avec k+1 alors il divise b-a (th de Gauss) ce qui est impossible puisque $b-a < x+1$. En particulier si x+1 est premier il est premier avec k+1 et il n'y a pas de codiviseur.
Si $2k > x$ , comme $b < x$ on a $ak+r < x < 2k$ ce qui entraîne $a = 1$ et , avec $r \leq k-1$ donc $r(k+1) \leq k^2-1$, on obtient :$rx = k^2-1+kr \geq r(k+1)+kr = (2k+1)r$ donc $x \geq 2k+1$ ce qui est contradictoire.
De $r(x+1) = (k^2-1)a+r(k+1)$ on déduit, si $r = k-1$, que $x+1 = (k+1)(a+1)$ et si on pose alors $u = k+1$ , $v = a+1$ , on a : $k = u-1$, $a = v-1$, $r = u-2$ , $b = ak+r = uv-v-1$, $x = uv-1$, et enfin $n = ax+b = v(uv-2)$ et $n' = bx+a = (u-1)v(uv-2) = kn$.
En base 17 on trouve 4 codiviseurs : si k = 2 , n = 96 ; si k = 5, n = 24 et n = 48 ; si k = 8, n = 32.

**I.27** 1 est élément de F car b est le plus petit élément de E.
Si $d = a\wedge b$, il divise tous les éléments de E, donc tout nombre non multiple de d est dans F.
Si a et b sont premiers entre eux, il existe $\alpha$ et $\beta$ positifs tels que $a\alpha - b\beta = 1$, $0<\alpha<b$ et $0<\beta<a$. Comme $ab-a-b+1 = a(\alpha-1)+b(a-\beta-1)$, ce nombre k appartient à E
Soit $x = am+bn > k$ ; on a $m > \alpha-1$ ou $n > a-\beta-1$.
Dans le premier cas $x-1 = a(m-\alpha)+b(n+\beta)\in E$.
Dans l'autre cas $x-1 = a(m+b-\alpha)+b(n-a+\beta)\in E$. Ceci peut être itéré en descendant jusque k.
Soit $q = ab-a-b$ ; si $q = am+bn$ alors $0 = a(m+1-b)+b(n+1)$. Comme a est premier avec b, il divise n+1 mais $n < a$ et $n+1 = a$ entraîne $m+1 = 0$ ce qui est impossible, donc q est le plus grand élément de F.
Imaginons un tableau à double entrée des am+bn limité par $0 \leqslant m \leqslant b$ et $0 \leqslant n \leqslant a$
Ce tableau contient $(a+1)(b+1)$ nombres qui sont tous distincts sauf ab qui figure 2 fois aux extrémités de la diagonale. En effet $am+bn = am'+bn'$ s'écrit $a(m-m') = b(n'-n)$ dont la seule possibilité est $m = m'$ et $n = n'$ compte tenu de a et b premiers entre eux et $m-m' < b$.
Appelons E' l'ensemble des éléments de E inférieurs à q.
Pour des raisons de symétrie par rapport au centre du rectangle, on peut associer à tout nombre x de ce rectangle le nombre $y = 2ab-x$ et ces 2 nombres sont différents sauf si $x = ab$.
Donc le tableau contient 2 card(E')+2 card[q ;ab] nombres d'où card(E') puis card(F).

**I.28** On pose $a = 11….1$ le nombre qui s'écrit avec p-1 chiffres 1. Si p est premier avec 10 (en particulier si p>5) on a d'après le théorème de Fermat : $10^{p-1} \equiv 1 \ [p]$ ( si on se limite à p<10 cela peut se vérifier)
En tant que somme d'une suite géométrique de raison 10, $9a = 10^{p-1}-1$ et est donc divisible par p, donc a est divisible par p si $p\neq 3$ ( d'après le théorème de Gauss )
D'après l'écriture de A on a : $A = 9 + 90a + 10^p(8 + 80a) +10^{2p}(7 + 70a)……+10^{8p}(1 + a)$ et comme $10^p\equiv 10 \ [p]$ et $a\equiv 0 \ [p]$ on a alors $A \equiv 9 +10\times 8 + 100\times 7 ….+10^8$ qui n'est autre que B
A-B est donc bien divisible par p si p>5 .
Etudions les cas où p n'est pas premier avec 10 :
Si p = 2 ou p = 5 , A-B est divisible par p car A et B se terminant tous deux par 9, A-B se termine par 0. Si p = 3 , A-B est divisible par 3 car A et B sont tous deux divisibles par 3.

**I.29** Soit $\overline{a_n……a_1}$ l'écriture de n ; en isolant $a_p$ on peut écrire $n = 10^p q + 10^{p-1} a_p + r$ , r étant formé des chiffres $a_{p-1}….a_1$ , (r = 0 si p = 1 ). Si on enlève $a_p$ on obtient le nombre $n_p = 10^{p-1} q + r$ qui est divisible par 7.

Donc , modulo 7 , $10^{p-1} q \equiv -r$ , $10^p q \equiv -10r \equiv -3r$ , et $n \equiv 10^{p-1} a_p - 2r$ (E)
Si p = 1 , r = 0 , donc $n \equiv a_1$ ; si p = 2 , r = $a_1$ , donc $n \equiv 10a_2 - 2a_1$ .
On a donc $10a_2 - 2a_1 \equiv a_1$ d'où on déduit que $3(a_2 - a_1)$ est divisible par 7 et comme 3 et 7 sont premiers entre eux, $a_2 - a_1$ est divisible par 7 .
Supposons alors que les p premiers chiffres de n soient congrus modulo 7 , alors $r \equiv a_1 x$ avec $x = 1 + 10 + \ldots + 10^{p-1}$ . En étudiant les différents restes possibles de la division de $10^k$ par 7 on trouve que $10^k$ est congru à 1 , 3 , 2 , 6 , 4 , 5 selon que k a pour reste 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 dans la division par 6, et en conséquence que r est congru à $a_1$ , $4a_1$ , $6a_1$ , $5a_1$ , $2a_1$ , 0 selon que p a pour reste 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 0 dans la division par 6 . Dans chacun de ces 6 cas la relation (E) permet de déduire que $a_{p+1}$ est aussi congru à $a_1$.
Par récurrence tous les chiffres de n sont donc congrus entre eux modulo 7 et n ne contient que des 0 et des 7ou des 1 et des 8 , ou des 2 et des 9 ou ne contient qu'un seul type de chiffre avec 3 , 4 , 5 , ou 6.
Dans le premier cas le problème est résolu quel que soit le nombre de chiffres de n.
Dans les autres cas, $n \equiv a ( 1 + 10 + \ldots + 10^{n-1} )$ et $n' \equiv a (1 + 10 + \ldots + 10^{n-2} )$, et comme a < 7 est premier avec 7 , n' ne peut être divisible par 7 que si son nombre de chiffres est un multiple de 6, donc si le nombre de chiffres de n est de la forme 1+6k .

**I.30** Ecartons d'abord quelques cas élémentaires. Si b=0 tout entier a est solution et alors $k=a^2$ (id si a=0 ) Si le quotient est 1 alors $(a-b)^2=1-ab$ et pour que $1-ab \geq 0$ la seule solution (autre que les précédentes) est a=b=1. Réciproquement si a=b , $2a^2$ ne peut être divisible par $1+a^2$ que si a=1 et k=1.Supposons alors a>b>0 . Le quotient est k si a est solution de l'équation (E) : $x^2 - kbx + b^2 - k = 0$ L'autre solution de cette équation est $a' = kb-a$. Montrons que a' < b.

On a: $b-a' = b-(kb-a) = \dfrac{(a-b)b^2 + a + b}{1+ab}$ . Or b<a donc ce résultat est positif.
Montrons que a' ne peut être négatif :
$a' \leq -1 \Rightarrow 1+ba' \leq 1-b$ et comme a' est solution de (E) : $a'^2 + b^2 = k(1+ba') \leq k(1-b) \leq 0$.
Ce qui est impossible.
Supposons alors a' > 0. En remplaçant a par b et b par a' on a un nouveau couple strictement inférieur au précédent et solution du problème car $\dfrac{b^2 + a'^2}{1+ba'} = k$. Ceci ne peut se poursuivre indéfiniment (antipharèse) donc après un certain nombre d'opérations du même type on aura nécessairement un couple (a,b) tel que kb-a = 0 donc $\dfrac{a^2 + b^2}{1+ab} = \dfrac{a}{b}$ ce qui donne $a = b^3$ et alors $k = b^2$ : le quotient est bien un carré.
<u>Remarque</u> : la manipulation précédente sur le couple ( $b^3$,b ) conduit au couple trivial (b,0).
A partir du quotient $n^2$ , notons $a_0 = n$ , $b_0 = 0$ puis $a_1 = n^3$ , $b_1 = n$ et déterminons de proche en proche 2 suites d'entiers a et b selon l'antipharèse précédente qui transforme le couple ($a_p$ , $b_p$) en un couple ( $a_{p-1} = b_p$ , $b_{p-1} = n^2 b_p - a_p$ ) ce qui donne $a_p = n^2 a_{p-1} - a_{p-2}$ . Cette relation récurrente permet de fabriquer une suite de polynômes $P_p(n)$ : les polynômes de Dewasme , dont les premiers sont n , $n^3$ , $n^5 - n$ , $n^7 - 2n^3$ …etc et qui sont tels que tout couple ( $P_p(n)$ , $P_{p-1}(n)$ ) est alors solution du problème.

**Etude matricielle :** Posons $M = \begin{pmatrix} n^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V_p = \begin{pmatrix} P_{p+1} \\ P_p \end{pmatrix}$. On a $V_p = M^p V_0$ . La matrice M a 2 valeurs propres distinctes $\alpha = \dfrac{n^2 + \sqrt{n^4 - 4}}{2}$ et $\beta = \dfrac{n^2 - \sqrt{n^4 - 4}}{2}$ et après diagonalisation on obtient donc $P_p(n) = \dfrac{n(\alpha^p - \beta^p)}{\alpha - \beta}$ pour tout p positif ou nul.

**Le triangle de Dewasme :** Les polynômes précédents sont impairs et normalisés
Inscrivons leurs coefficients dans un tableau à double entrée :
On peut mettre en place des règles simples permettant de remplir un tel tableau :
on place des 1 sur la diagonale
on place des 0 sur la transversale au dessus de la diagonale
sur la première ligne on place des 0 sur les cases paires et une alternance de 1 et de –1 sur les cases impaires
il ne reste plus qu'a remplir le tableau selon la règle $a_{l,c} = a_{l-1,c-1} - a_{l,c-2}$ chaque case est obtenue en faisant la différence entre la case de la ligne précédente colonne précédente et la case de la même ligne et 2 colonnes avant.

| | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** | **$P_5$** | **$P_6$** | **$P_7$** | **$P_8$** | **$P_9$** | **$P_{10}$** | **$P_{11}$** | **$P_{12}$** | **$P_{13}$** | **$P_{14}$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| **$n^3$** | | 1 | 0 | -2 | 0 | 3 | 0 | -4 | 0 | 5 | 0 | -6 | 0 | 7 |
| **$n^5$** | | | 1 | 0 | -3 | 0 | 6 | 0 | -10 | 0 | 15 | 0 | -21 | 0 |
| **$n^7$** | | | | 1 | 0 | -4 | 0 | 10 | 0 | -20 | 0 | 35 | 0 | -56 |
| **$n^9$** | | | | | 1 | 0 | -5 | 0 | 15 | 0 | -35 | 0 | 70 | 0 |
| **$n^{11}$** | | | | | | 1 | 0 | -6 | 0 | 21 | 0 | -56 | 0 | 126 |
| **$n^{13}$** | | | | | | | 1 | 0 | -7 | 0 | 28 | 0 | -84 | 0 |
| **$n^{15}$** | | | | | | | | 1 | 0 | -8 | 0 | 36 | 0 | -120 |
| **$n^{17}$** | | | | | | | | | 1 | 0 | -9 | 0 | 45 | 0 |
| **$n^{19}$** | | | | | | | | | | 1 | 0 | -10 | 0 | 55 |
| **$n^{21}$** | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -11 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -12 |

On constate alors que l'on retrouve les lignes du triangle de Pascal de manière alternée sur les transversales secondaires impaires du triangle de Dewasme.

Précisons cela : si le polynôme s'écrit $P_p(n) = \sum_0^p a_{k,p}\ n^{2k+1}$ , $a_{k,p} = 0$ si p+k est pair

et si p+k est impair (donc aussi p-k) $a_{k,p} = (-1)^r C^k_s$ avec $r = \dfrac{p-k-1}{2}$, $s = \dfrac{p+k-1}{2}$.

Ceci peut alors se vérifier par récurrence car la relation $a_{k,p} = a_{k-1,p-1} - a_{k,p-2}$ correspond alors à la formule de Pascal sur les coefficients binomiaux .

**I.31** Si vous avez trouvé la solution : les nombres sont 13 et 4, vous êtes très fort, et si vous avez montré que c'est la seule, faites rapidement une communication car vous êtes sans doute le premier !!!

**I 32** E étant l'ensemble des 10 nombres choisis, il y a 1023 parties non vides de E et comme il y a au plus 1000 sommes possibles, 2 parties ont la même somme. Il reste à ôter les éléments communs des 2 parties.

**I 33** Les nombres ayant un nombre pair de chiffres se terminent par 0. Si n a un nombre de chiffres impair, k chiffres 1 et k-1 chiffres 0, 11n s'écrit avec 2k chiffres 1 et si q s'écrit avec k chiffres 1, on a : $11n = q(10^k + 1)$

Si k est pair, 11 divise q et $10^k + 1$ divise n

Si k est impair 11 divise $10^k + 1$ et q divise n

Donc n a des diviseurs stricts sauf si q = 1 c'est-à-dire n = 101

**II.1** x = V/v vérifie l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$, d'où $x = 1+\sqrt{2}$.

**II.2** Les différents coups de sifflet durent $t+\frac{vt}{340}$; $t-\frac{vt}{340}$; $t+\frac{vt-2d}{340}$ avec t la durée réelle du coup de sifflet, v la vitesse du train et d la distance entre la gare et le passage à niveau.
On en déduit d = 170 m et vt = 255 m.

**II.3** Si h est la hauteur atteinte par l'échelle et d son écartement au sol, on a les 2 relations $70(\frac{1}{h}+\frac{1}{d}) = 1$ et $h^2 + d^2 = 62500$ ; d'où $h= 5a + \sqrt{25a^2 - 700a}$ avec $a = 700(7+\sqrt{674})$.

**II.4** Posons OB = x et $\widehat{OBA} = \theta$. On a $x = 5\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$ et $OH = \frac{1+x\sin\theta}{\cos\theta} = f(\theta)$

$f(\theta)=\frac{1+5\sin\theta\cos\theta-5\sin^2\theta}{\cos\theta}$ est maximale quand $f'(\theta) = 0$ soit $4\tan^3\theta + 9\tan\theta - 5 = 0$

qui n'a qu'une solution $\tan\theta= 0,5$ ce qui donne $OH = \sqrt{5}$.

**II.5** Si n est le nombre de marches et v la vitesse de l'escalier en marches/s on a :
15v+20 = n = 12v+22 d'où n = 30 et v = 2/3 . Gaston a descendu 42 marches.

**II.6** Pour $q \geqslant p$ on note $F_p(q)$ la quantité minimale pour transformer les q premières marches en p marches et $A_p(q)$ la quantité pour élever les marches p+1, p+2, ….q-1 au niveau de la marche q . Alors $F_k(k)=A_{k-1}(k)=0$ et $F_p(q) = \min_{p-1\leqslant i\leqslant q-1}(F_{p-1}(i) +A_i(q))$
Successivement : $F_1(2)=4,5$, $F_1(3)=17,4$, $F_2(3) =\min(6,7 ;4,5)$…… et on trouve pour résultat final 17,1 en utilisant $A_7(9)=3$, $A_4(7)=8,6$, $A_2(4)=1$ et$A_0(2)=4,5$.

**II.7** Continuité des fonctions distance fonction du temps pour les trajets aller et retour.

**II.8** Envisager x-E(x), 2x-E(2x)…..(n-1)x-E((n-1)x), partager l'intervalle [0;1] en n parties égales et après avoir éliminé le premier et le dernier utiliser le principe de Dirichlet (tiroirs).

**II.10** $f(x) = x^2 + x\sqrt{1 - x^2}$ a pour maximum $1+\sqrt{2}$ pour $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$g(\theta) = \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$ a son maximum pour $\theta= \pi/8$ .

**II.12** Les graphiques des 2 fonctions v+u et v-u dans un même repère explique le titre.

**II.14** l'étude de $g(x) = \exp(2x^2 \ln(x) - x^2)$ est un bon exemple d'exponentiation.

**II.17** $h'(x) = \alpha(1 - (\frac{b}{x})^\beta)$ donc h a un minimum pour x=b et ce minimum est nul, donc h(x) > 0 si $x \neq b$ . En appliquant l'inégalité aux couples $A_i$ ,$B_i$ et en ajoutant les inégalités obtenues on trouve (H) :$\ln(m(x)) = \ln d_p + \frac{1}{x}\ln[\sum c_i(\frac{d_i}{d_p})^x]$ . Comme $d_i < d_p$ , $(\frac{d_i}{d_p})^x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ , donc ln(m(x)) a pour limite $\ln d_p$ et m(x) a pour limite $d_p$ . En procédant de même on trouve que m(x) a pour limite $d_1$ quand x tend vers $-\infty$.

ln m(x) a pour limite $\sum_{i=1}^{p} c_i \ln d_i$ on en déduit que $m(0) = \prod_{i=1}^{p} d_i^{c_i}$ (moyenne géométrique).

Posons $\alpha = \frac{x}{y}$ et $\beta = 1-\alpha$ , $a_i = c_i d_i^{\,y}$ et $b_i = c_i$ ; l'inégalité (H) fournit :

$(m(x))^x < (m(y))^x$ et avec $x > 0$ m est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On montre de même que m est croissante sur $\mathbb{R}^-$ donc sur $\mathbb{R}$, puisque m est continue par prolongement .

**II.21** On procède par récurrence en séparant n pair et n impair et en écrivant pour n =2p-1, $u_{n+1}$ sous la forme $0{,}5u_p$ + des inverses de nombres impairs.

**II 22** Par récurrence, on montre que $3u_n^2+1$ est un carré : si $3u_n^2+1=k^2$, $3u_{n+1}^2+1=(3u_n+2k)^2$.

**II.23** Par l'absurde : si $u_n>a$ pour tout n, on fabrique une sous-suite en passant à $u_{n+1}$ quand $u_n$ est pair et à $u_{n+2}$ si $u_n$ est impair. On obtient alors une sous-suite d'entiers strictement décroissants minorés par a. A partir du rang p tel que $u_p \leqslant a$ , le même raisonnement donne que nécessairement la suite prend 2 valeurs égales entre 0 et a et qu'elle est périodique.

**II.24** Quel que soit le nombre de dénominateurs superposés le second membre est homographique dont les coefficients sont les termes de la suite et l'équation se ramène toujours à $x^2 = x+1$

**II 25** Le point M a pour coordonnées : a – th a et 1/ch a. On peut obtenir en tant que courbe paramétrée (sh a ; -1) comme vecteur tangent.

**II.26** Posons $f_n(x)= -1+x+x^2\ldots\ldots+x^n$ On a $0=f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_{n+1}) + u_{n+1}^{\,n+1}$ , donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et comme $f_n$ est croissante, $u_n$ est décroissante minorée par 0 donc convergente.

$\frac{1-u_n^{\,n+1}}{1-u_n} = 2$ et comme $0 < u_n < u_2 < 1$, $u_n^{\,n+1}$ tend vers 0 et $u_n$ a pour limite ½ .

**II 27** L'inégalité est la conséquence du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $2\sqrt{x}$ sur [n ;n+1]. Par sommation des différentes inégalités on obtient $u_{n+1} - 1 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$ puis : $u_n$ tend vers $+\infty$. , $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - (2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - (2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) \leq 0$ donc $v_n$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

**II 28** $a_0$ étant la partie entière de x , $x-a_0 < 1$ donc $x_1 > 1$ . Si x est rationnel , $x_1$ , ….$x_n$ sont des rationnels obtenus par division euclidienne ; les dénominateurs étant les restes de l'algorithme d'Euclide , l'un de ces restes est égal à 1 donc $x_n$ est entier ; ( la réciproque est immédiate )

La relation étant admise à l'ordre n-1 , le remplacement de $x_n$ par $a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ redonne la même relation à l'ordre n. Les relations de l'énoncé montrent que $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1}$ est une suite géometrique de raison -1 . La fraction $r_n$ est alors irréductible d'après le théorème de Bezout.

$r_n - x = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_nx_{n+1}+p_{n-1}}{q_nx_{n+1}+q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}}{q_n(q_nx_{n+1}+q_{n-1})}$ est du signe du numérateur $c_n = (-1)^{n-1}$ donc alterné ( $r_n$ et $r_{n-1}$ sont de part et d'autre de x ) et $r_n - r_{n-1} = \frac{c_n}{q_nq_{n-1}}$ . Or comme $a_n > 1$ la relation de récurrence de $q_n$ entraîne que $q_n > q_{n-1} + q_{n-2}$ donc que $q_n$ est croissante, $q_n > 2q_{n-2} > 2^{\frac{n}{2}}$ (si n pair) donc $q_n$ tend vers $+\infty$ et en valeur absolue $x- r_n < r_n - r_{n-1}$ tend vers 0 ( c'est à dire que $r_n$ converge vers x ).

On montre par récurrence que $a_n = 1$ pour tout n si $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $a_n = 2$ pour tout n si $x = 1+\sqrt{2}$ .

**II 29** Suites adjacentes.

**II 31** Avec y=x on trouve que xf(x) est invariant par f. Soit alors a un invariant par f, on vérifie par récurrence que $a^n$ est aussi invariant, car si $f(a^n) = a^n$, on a alors $f(a^{n+1}) = f(af(a^n)) = a^{n+1}$.
De plus f(1f(a))=af(1) d'où on déduit que f(1)=1 et comme af(1/a)=f(1/a f(a)) = 1 donc que f(1/a)=1/a et par récurrence $f(1/a^n)=1/a^n$ . Procédons alors par élimination : si a > 1 $f(a^n) = a^n$ est impossible compte tenu de la limite de f, il en est de même si a < 1 avec $f(1/a^n)$ , la seule possibilité est a = 1 qui est le seul invariant de f , et en conséquence x(f(x)) = 1 d'où f(x) = 1/x est la seule solution du problème.

**II 32** Si m et M sont le minimum et le maximum de f sur [0 ;x] le théorème de la moyenne entraîne $m \le F(x) \le M$ et quand x tend vers 0 , m et M tendent vers 0 et par encadrement F(x) tend vers 0
En dérivant $F'(x) = \frac{1}{x}[\, f(x) - F(x)\, ]$ . Or si f est croissante M =f(x) donc $F(x) \le f(x)$ et F est croissante. La propriété étant vérifiée pour n=0 , mettons en place une récurrence : par une intégration par parties on a : $\int_0^x t^{n+1} f^{(n+1)}(t)dt = [t^{n+1}f^{(n)}(t)]_0^x - (n+1)\int_0^x t^n f^{(n)}(t)dt$ ; divisons par $x^{n+1}$ et dérivons : $F^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1} f^{(n+1)}(t)dt$ ce qui prouve la propriété par récurrence .

**II 33** La couronne ayant pour rayons R-h et R+h a pour aire $4\pi Rh = 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2}$ et $V = \int_{-r}^{+r} S(z)dz$

$g'(x) = r\cos x\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 x} = r^2\cos^2 x$ , $g(x) = r^2(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}) + cte$ , avec une constante nulle car g(0)=0 d'où $V = 4\pi R\,[\, g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{-\pi}{2})\,] = 2\pi R\, \pi r^2$.
*On a sur un exemple le théorème de **Guldin** : V est le produit de la surface tournante par la distance parcourue par son centre de gravité.*

**II 34** f est continue donc intégrable ; si 0 < x < 1 , f(x) < 0 et $x^2 < x$ donc f est positive , si 1<x , f(x) > 0 et $x^2 > x$ donc f est aussi positive . $F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{x-1}{\ln x} > 0$ pour tout x de D .
L'inégalité sur F est l'application du théorème de la moyenne et quand x tend vers 0 , F(x) tend vers 0 et $\frac{F(x)}{x}$ aussi (tangente horizontale pour la courbe de F ) ; si x tend vers $+\infty$ , F(x) aussi .
$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t} = [\ln(\ln t)\,]_x^{x^2} = \ln 2$ . On peut écrire F(x) – ln 2 sous la forme $\int_x^{x^2}\frac{(t-1)dt}{t\ln t}$ et comme

précédemment le théorème de la moyenne montre que cette intégrale a une limite nulle quand x tend vers 1.

**II 35** g '(x) =1 donc g(x) =x+cte ; $\int_0^1 f(t)dt = g(\frac{\pi}{4}) - g(\frac{-\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$. Si 0<t<1 , 0<t(1-t)<0,25 et $0<u_n<(0,25)^n$ donc $u_n$ a pour limite 0 . Par intégration par parties $I_{p+1,q+1} = \frac{q+1}{p+2} I_{p+2,q}$ et par itération $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} I_{2n,0} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Après développement $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}$ . Comme somme d'une suite géométrique, $\sum_0^n [2t(1-t)]^k$ est égal à $f(t) - \frac{[2t(1-t)]^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$ et après intégration $\sum_1^n 2^k u_k = \frac{\pi}{2} - 1 - \int_0^1 [2t(1-t)]^{n+1} f(t)dt$ . Or cette intégrale tend vers 0 (voir majoration de $u_n$) donc quand n tend vers $+\infty$ , $\sum_{k=1}^{n} 2^k u_k$ a pour limite $\frac{\pi}{2} - 1$.

**II 36** $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$ . Sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ , $0 < \cos^n x < \cos^{n-1} x$ donc $I_n \leq I_{n-1}$ ($I_n$ décroissante)
Posons $u = \cos^{n-1} x$ et $v = \cos x$ , l'intégration par parties donne :

$I_n = [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\sin x\, dx$ ; or pour n > 1 le crochet est nul et on en déduit que $I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ d'où la relation . En divisant par $I_{2p}$ l'inégalité $I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$ et selon la relation précédente, on obtient par encadrement que $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ tend vers 1. A partir de la relation de récurrence et en procédant par itération on obtient

$I_{2p=1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, à partir de $I_1$ , et $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$ à partir de $I_0$.

$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = \frac{2(n!)^4 2^{4n}}{n((2n)!)^2} = \pi\frac{2n+1}{n} * \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ a donc pour limite $2\pi$ et si on admet que $u_n$ converge donc que $u_n$ et $u_{2n}$ ont toutes deux la même limite L , on en déduit que $L = \sqrt{2\pi}$ d'où la formule de Stirling : $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

**II 37** $0 \leq e^x - 1 \leq 1$ donc $0 \leq f_0(x) \leq 1$ ; comme somme d'une suite géométrique de raison $e^{-x}$ , $\sum_1^n x e^{-kx} = f_0(x) - f_n(x)$ . Alors comme $xe^{-kx}$ a pour primitive $-\frac{kx+1}{k^2} e^{-kx}$ , on obtient donc

$\int_0^a xe^{-kx}dx = \frac{1}{k^2} - \frac{ka+1}{k^2}e^{-ka}$ et en prenant la limite quand a tend vers $+\infty$ , $I_k = \frac{1}{k^2}$ .

de plus $0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$ donc $0 \leq \int_0^x f_n(t)dt \leq \frac{1}{n}$ , donc $\int_0^\infty f_n(t)dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ . Comme $\sum_1^n I_k = \int_0^\infty f_0(x)dx - \int_0^\infty f_n(x)dx$ on obtient $\sum_1^\infty I_k = \int_0^\infty f_0(x)dx$ , g est continue en 0 ; et par intégration par parties : $\int_0^\pi g(t)\sin((2n+1)t/2)dt = [\frac{2g(t)}{2n+1}\cos((2n+1)t/2]^\pi{}_0$ - K et comme $|K| \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(t)dt$ ; K tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; quant au crochet qui vaut $\frac{4a}{2n+1}$; il tend aussi vers 0 et l'intégrale a donc une limite nulle. Par 2 intégrations par parties $\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}$ si a = - 1 et b = $\frac{1}{2\pi}$. Comme $\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos(kt) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}$; on en déduit par intégration que $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**II 38** Supposons a; b; c en ordre croissant et posons f(x)= $\frac{a}{1+bx} + \frac{b}{1+ax} + \frac{x}{1+ab}$ pour x∈ [b ; 1]

Alors f ''>0 d'où f ' est croissante ; or f '(b) = $\frac{1}{(1+ab)^2} - \frac{ab}{(1+b^2)^2}$

Posons g(x) = $\frac{1}{(1+xb)^2} - \frac{bx}{(1+b^2)^2}$ sur [0 ;b]. g'<0 donc g décroissante et g(a) ⊳ g(b) ⊳ 0

donc f '(b)>0 Et comme f '(x)> f '(b) on en déduit que f est croissante et atteint son maximum pour c=1 Ce maximum étant $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + \frac{1}{1+ab}$ on pose h(x) = $\frac{a}{1+x} + \frac{x}{1+a} + \frac{1}{1+ax}$ ; x∈[a ;1]

On a h'' > 0 donc h' est croissante et h'(x) > h'(a) = $\frac{(a-1)(a^3-1)}{(1+a)^2(1+a^2)^2}$ > 0 . h est croissante et atteint son maximum pour b=1. Ce maximum est $\frac{a}{2} + \frac{2}{1+a}$ qui est maximale pour a = 0 et vaut 2.

**II 39** f(x)< $\frac{\pi}{4}$ $e^{-x}$ donc f(x) tend vers 0. $\varphi$ (x) = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(e^X-1)}{X\cos^2 t}$ exp(-a/cos²t) dt avec X = $\frac{a-x}{\cos^2 t}$ donc

$\varphi$ (x) tend vers 0 et f '(x)= - $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(\frac{-x}{\cos^2 t})}{\cos^2 t}dt$ .

$$x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2\tan^2 t)}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Q'(t)dt = Q(\frac{\pi}{4}) - Q(0) = P(x) = \int_0^x \exp(-t^2)dt .$$

g '(x) = 2x f '(x) = -2x $e^{-x^2}$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2\tan^2 t)}{\cos^2 t}dt$ ; h '(x) = 0 donc h(x) = g(0) = $\frac{\pi}{4}$.

**II 40** Les courbes de $g_a$ et $g_{-a}$, de $f_a$ et de $f_{-a}$ sont symétriques par rapport à l'origine . g est décroissante et si a < 0 , g(x) < 0 pour tout x<0 et si $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < a < 0$ alors g(x) > 0 si x > 0.

Si $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < a < 0$ f est décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition et si $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} > a$ f possède un minimum pour la valeur annulant g.

**III 1** Pensez aux dalmatiens en n'oubliant pas le narrateur.

**III 2** La détermination d'un carré consiste à choisir k lignes voisines et k colonnes voisines sur le damier ce qui donne (n-k+1)×(n-k+1) choix pour k fixé. Donc le nombre de carrés est $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Le nombre de rectangles de base k est (n-k+1)(base)×(1+2+…n)(hauteur) et en faisant varier k le nombre total est donc $(1+2+\ldots\ldots+n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ Le nombre de parallélogrammes de côtés 1×1 est $3C_n^2$,de cotés 1×2 est $3C_{n-1}^2$ etc . Le total des parallélogrammes de base 1 est $3(C_2^2+C_3^2+\ldots..C_n^2) = 3C_{n+1}^3$ , de même le nombre de parallélogrammes de base 2 est $3C_n^3$ et ainsi de suite. Le nombre total de parallélogrammes est alors $3(C_3^3+C_4^3+\ldots\ldots..+C_{n+1}^3) = 3C_{n+2}^4$ , chacune de ces sommations se justifiant sans difficulté par récurrence à l'aide de la formule de Pascal.

**III 3** Il y a 9 choix pour le premier chiffre , 8 pour le second , 7 puis 6 pour les autres donc 3042 codes. S'il ne met qu'un prospectus par boite il a 10 possibilités pour le premier , puis 9,8,7,6,5,4 pour les autres ce qui fait 60840 choix. Avec plusieurs prospectus par boite il a 10 possibilités pour chaque donc $10^{10}$ possibilités en tout.
Si les 5 chiffres sont strictement croissants le second facteur doit choisir 5 chiffres différents, l'ordre étant ensuite parfaitement déterminé, il a donc $C_9^5$ choix . Si les 5 chiffres sont croissants au sens large il peut décider d'ajouter 1 au second 2 au troisième, puis 3, puis 4 pour se ramener au cas précédent , mais il aura alors à choisir 5 nombres parmi 13 (la manipulation est une bijection entre le choix de 5 chiffres croissants au sens large entre 1 et 9 et 5 nombres croissants au sens strict entre 1 et 13. On peut simuler la répartition de 7 prospectus identiques en supposant un alignement de 16 symboles : 7 p pour les prospectus et 9 / pour simuler les séparations des 10 boites (les p avant le premier / étant les prospectus mis dans la première boite et ceux après le dernier / étant mis dans la dixième boite). Une distribution étant déterminée par l'emplacement des 7 p dans cet alignement de 16 symboles, il y a $C_{16}^7$ possibilités.
*Les problèmes des choix des facteurs sont une explication partielle et personnelle des retards fréquents du courrier*.

**III 4** Le nombre de cas est 8×8×8×8=4096 Il y a 8 carrés ,224 brelans (8 cas de brelan,7 possibilités pour la 4° carte et 7 cas pour sa couleur ) , 8×7×6×5 = 1680 cas pour 4 cartes différentes. Pour la double paire le choix des 2 valeurs donne $C_8^2 = 28$ possibilités et le choix des 2 couleurs de la première paire 6 possibilités donc il y a 168 cas de double paire. Pour une simple paire il y a 8×7×6 choix des 3 couleurs et 6 possibilités de placer la paire donc 2016 cas.
On vérifie bien : 8 + 224 + 1680 + 168 + 2016 = 4096.

**III 5** Un chemin de longueur n est une succession de n vecteurs avec 2 choix à chaque étape : il y en a $2^n$ . Les extrémités sont les points de la droite x+y=n ayant leurs 2 coordonnées dans $\mathbb{N}$ .
Le choix d'un chemin [OB] est le choix des p emplacements des vecteurs i dans la succession de p+q vecteurs : leur nombre est donc $C_{p+q}^p$ . Si p=q ces chemins ont tous un point sur la droite d'équation x+y=p . Appelons $A_k$ ce point (avec k entre 0 et p pour l'abscisse de $A_k$ ), le nombre

de chemins $[OA_k]$ est $C_p^k$ et il en est de même du nombre de chemins $[A_kB]$ Donc $(C_p^k)^2$ est le nombre de chemins [OB] passant par $A_k$ et on en déduit la formule en faisant varier k de 0 à p .
L'échange entre les vecteurs i et j est une bijection qui transforme [OA] en [O'A] donc ces chemins sont en nombres égaux.
Si q < r aucun chemin [OB] ne peut avoir de point sur D.
Sinon , en appelant A le premier point sur D du chemin [OB] et en remplaçant [OA] par [O'A] le nombre de chemins [OB] ayant un point sur D est $C_{p+q}^{p+r}$ et le nombre de chemins n'ayant pas de point sur D est obtenu par différence avec le nombre total de chemins [OB].
L'intersection des droites x+y=n et y=x+r a pour coordonnées $(\frac{n-r}{2},\frac{n+r}{2})$
Si n et r ont la même parité, on peut prendre pour extrémité tout point B de la droite x+y=n ayant une ordonnée pouvant varier de 0 à $\frac{n+r-2}{2}$ et d'après la question précédente le nombre de cas où le joueur joue n fois sans ruine est $C_n^0+\ldots+C_n^{r-1}+(C_n^r-C_n^0)+(C_n^{\frac{n+r-2}{2}}-C_n^{\frac{n-r-2}{2}})$
Après simplification il reste la somme de r termes : $C_n^{\frac{n-r}{2}}+\ldots\ldots+C_n^{\frac{n+r-2}{2}}$
On trouve un résultat analogue si n et r sont de parités différentes.

**III 6** Le nombre de coloriages possibles est p pour chaque case donc $p^n$ pour n cases.
Dans le cas d'une bande il y a ,si l'on veut des couleurs différentes pour des cases voisines, p possibilités pour la première case , p-1 pour la seconde , puis p-1 pour chacune des cases suivantes (en éliminant à chaque fois la couleur précédemment utilisée. La probabilité est $\frac{p(p-1)^{n-1}}{p^n}=(\frac{p-1}{p})^{n-1}$

Dans le cas d'une couronne , choisissons une case de départ arbitraire et colorions dans le sens trigonométrique . Pour 3 cases il y a $p(p-1)^2$ coloriages ,chaque case devant être d'une couleur différente de la précédente, mais la dernière devant être différente de la première, il faut éliminer des cas précédents les p(p-1) cas de la forme AXA ; il reste donc $p(p-1)^2-p(p-1)$. Pour n cases il faut de même , à partir des $p(p-1)^{n-1}$ cas d'une bande retirer les cas où la dernière et la première sont de même couleur ; dans ces cas l'avant dernière est de couleur différente de la première c'est à dire que c'est le même nombre de cas que pour une couronne de n-1 cases .Si on pose $u_n$ le nombre de coloriages satisfaisant d'une couronne de n cases on a : $u_n = p(p-1)^{n-1} - u_{n-1}$
On peut alors vérifier par récurrence que $u_n = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$ d'où la probabilité cherchée : $\frac{u_n}{p^n}$

**III 7** Ne pas perdre de vue qu'un « bonsaï », arbre à 4 branches n'est qu'une mise en forme particulière d'un système à 3 inconnues. Ecrire les relations avec ces inconnues et résoudre.

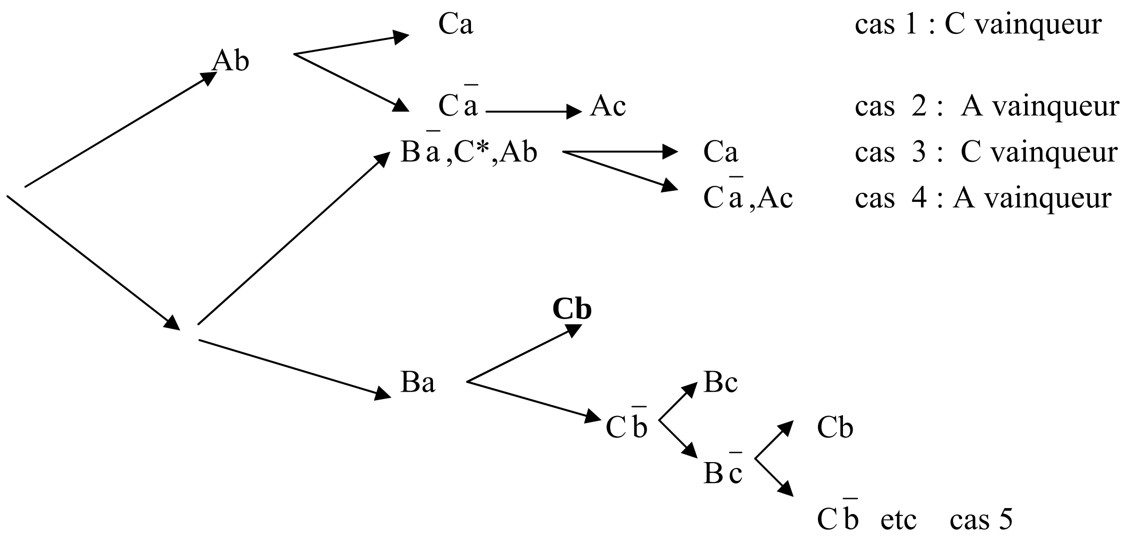
**III 8** L'indisponibilité des voitures étant indépendante, p(X=0) = $0,2\times0,2$ = 0,04 , les événements contraires étant aussi indépendants , p(X=2) = $0,8\times0,8$ = 0,64 et par complément p(X=1) = 0,32
Z peut prendre les valeurs 0 , 1 et 2 . Z=2 si X=2 et Y>1 , X et Y étant indépendantes
p(Z=2) = $0,64\times0,2$ = 0,128
Z = 0 si X=0 ou Y=0 donc p(Z=0)= 0,04 + 0,3 – $0,04\times0,3$= 0,328 et par complément p(Z=1) = 0,544
D'où la fonction de répartition de Z.

**III 9** Codons les événements : E il y a une embuscade, B la réponse du blanc et I celle de l'indien. On cherche la probabilité a posteriori $p(E/ B\cap I)$, c'est à dire la probabilité d'embuscade après la réponse des éclaireurs. En considérant les réponses des éclaireurs indépendantes on a $P(E\cap B\cap I) = p(E)\ p(B/E)\ p(I/E) = \frac{4}{10}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{60}$ et en procédant de la même manière, $P((\overline{E}\cap B\cap I)=\frac{9}{60}$ puis en additionnant les deux, $p(B\cap I) = \frac{13}{60}$ et enfin la probabilité cherchée égale à $\frac{4}{13}$ par définition d'une probabilité conditionnelle.

On remarquera que malgré leur peu de fiabilité et leurs réponses contradictoires les éclaireurs ont diminué la probabilité d'embuscade.

*L'armée de CUSTER a été massacrée à LITTLE BIG HORN .*

**III 10** Codons les événements : Ab signifiera que A élimine B , $B\overline{c}$ que B tire sur C et le rate et C* signifiera que C tire en l'air. Compte tenu de ma stratégie c'est A ou B qui commenceront le combat de manière équiprobable d'ou l'arbre :




Cherchons la probabilité p que A soit vainqueur :

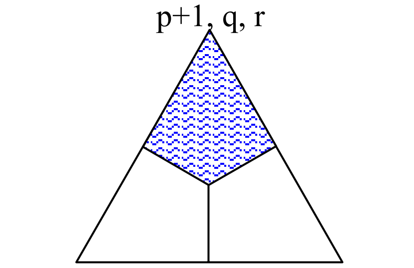
Cela se produit dans les cas 2 et 4 $p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{40}$.

Cherchons la probabilité p' que B soit vainqueur :

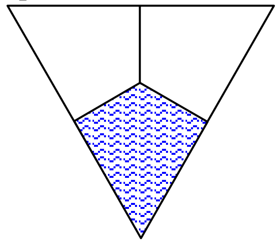
Cela ne se produit que dans le cas 5 sous la forme de la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}$ et de raison $q = \frac{1}{20}$ correspondant à 2 coups ratés successivement par B et C. La somme des termes de cette suite est alors :

$P'=\frac{81}{400}\times\frac{1}{1-\frac{1}{20}}=\frac{81}{380}$ et par complément C est vainqueur avec une probabilité $1-p-p'=\frac{389}{760}$ , soit presque deux fois plus grande que celle des bons tireurs !

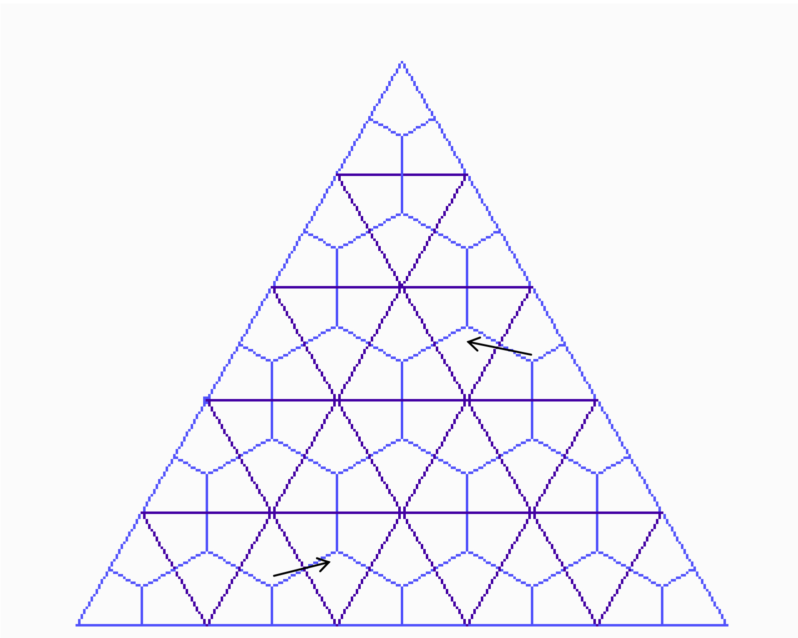
**III 12** Les points du triangle correspondant à une répartition sans reste sont les sommets de triangles équilatéraux.
Dans un triangle de type 1, les listes ABC ont déjà acquis respectivement p, q, r sièges et le dernier est à attribuer au plus fort reste qui est représenté par les distances aux côtés de ce triangle. La partie grisée représente la zone où le dernier siège est attribué à la liste A.

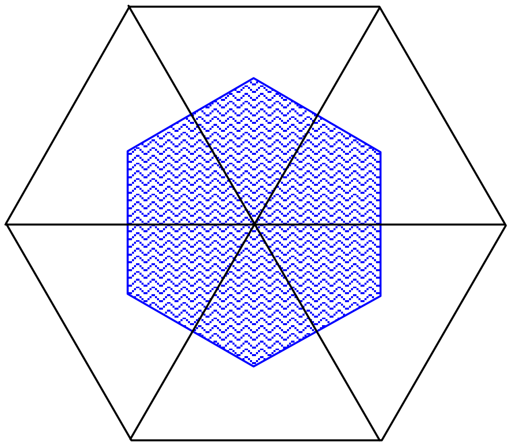



Dans les triangles de type 2 il reste 2 sièges à pourvoir et on utilise un raisonnement analogue pour déterminer la liste qui n'aura pas de siège (A dans la zone grisée.




En regardant les 6 triangles qui ont un sommet commun correspondant à une répartition donnée des sièges, on obtient un pavage hexagonal. On peut alors remarquer (flèches) qu'il est possible que la liste A perde 1 siège tout en augmentant son pourcentage de voix.





Les probabilités sont proportionnelles aux aires. Il y a 6 hexagones de probabilité p, 12 demi-hexagones de probabilité p/2 (cas où une liste n'a aucun siège) et 3 « coins » de probabilité p/6 (cas où une liste emporte tous les sièges) . Cela entraîne que p = 2/25  Plus généralement, avec k listes, il y a (k-1)(k-2)/2 cas de prob $2/k^2$, 3(k-1) cas de prob $1/k^2$ et 3 cas de prob $1/3k^2$

**IV 1** C et C' sont symétriques par rapport à OB donc OCC' est rectangle isocèle direct , c' = ic

et BC'C équilatéral direct d'où $\frac{c'-c}{b-c} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc c' = c$e^{-i\frac{\pi}{3}}$ + i$e^{i\frac{\pi}{3}}$ On en déduit c = $\frac{ie^{i\frac{\pi}{3}}}{i - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

Sous forme algébrique c = $\frac{-\sqrt{3}+i}{-1+i(2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4+2\sqrt{3}}(1+i)$ et sous forme trigonométrique

$$c = \frac{ie^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}(2i\sin\frac{5\pi}{121})} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}$$

*On peut trouver directement ce résultat d'après la proportionnalité des côtés et des sinus dans OCA*

**IV 2** Comme OA est orthogonal à AP , $\frac{p-a}{a}$ est un imaginaire (idem $\frac{p-b}{b}$ et $\frac{p-c}{c}$ ). Mais alors $\frac{b-a'}{c-a'} = \frac{b(p-c)}{c(p-b)} = \frac{\frac{p-c}{c}}{\frac{p-b}{b}}$ est le quotient de deux imaginaires, c'est donc un réel, ce qui signifie que A'BC sont alignés. De même $\frac{c-b}{a'} = \frac{pc-pb}{bc} = \frac{p}{b} - \frac{p}{c} = \frac{p-b}{b} - \frac{p-c}{c}$ est la différence de deux imaginaires, c'est donc un imaginaire ce qui signifie que OA' et BC sont orthogonaux . Les 2 résultats montrent que A' est la projection orthogonale de O sur BC (idem pour B' et C' )

Enfin $\frac{a'-b'}{a'-c'} = \frac{a(b-c)}{b(a-c)} = \frac{pca(b-c)}{pcb(a-c)} = \frac{\frac{b-c}{a'}}{\frac{a-c}{b'}}$ est le quotient de deux imaginaires (d'après la question précédente) donc c'est un réel et en conséquence A',B',C' sont alignés.

**IV 3** OQAR est un losange donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ OA = OQ+OR et a=q+r . De même b=r+p et c= p+q Posons ϖ=p+q+r ; on a de suite $|\varpi - a| = |p| = \rho$ et de même pour $|\varpi - b|$ et $|\varpi - c|$ donc le point Ω est équidistant de ABC et c'est le centre du cercle Γ qui a pour rayon ρ.

AP, BQ, CR et OΩ ont le même milieu S d'affixe s=$\frac{p+q+r}{2}$ donc les triangles ABC et PQR sont symétriques par rapport à S.

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$et $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right)$ et les points G et G' ont pour affixes respectives g $= \frac{a+b+c}{3} = \frac{2(p+q+r)}{3}$ et g' $= \frac{p+q+r}{3}$ donc $\overrightarrow{O\Omega} = 3\overrightarrow{OG'} = 1{,}5\overrightarrow{OG}$ et OΩSGG' sont alignés.

$Z = \dfrac{(p+r)\overline{(p-r)}}{(p-r)\overline{(p-r)}} = \dfrac{r\overline{p} - p\overline{r}}{(|p-r|)^2}$ car $p\overline{p} = r\overline{r} = \rho^2$ ; $r\overline{p} - p\overline{r}$ est la différence d'un complexe et de son conjugué : c'est un imaginaire et il en est de même de Z ce qui entraîne que RP d'affixe p-r est orthogonal à QΩ d'affixe p+r et par permutation Ω est l'orthocentre de PQR .

Comme p+r = b et que p-r = c-a Z est aussi égal à $\dfrac{b}{c-a}$ et en conséquence OB est orthogonal à AC et par permutation O est l'orthocentre de ABC.La droite OΩGG' est donc la droite d'EULER des 2 triangles.

**IV 4** On a $u_0=u_1=1$ et par récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ donc $k^3=2k+1$ , $k^4=3k+2$ , $k^5=5k+3$
$\cos 5\alpha=\mathrm{Re}(e^{5i\alpha})= \mathrm{Re}(\cos\alpha + i \sin\alpha)^5 = \cos^5\alpha-10\cos^3\alpha \sin^2\alpha+5\cos\alpha \sin^4\alpha$
$=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha = 1$ compte tenu des relations précédentes et en conséquence $\alpha=\dfrac{2\pi}{5}$ et k est le rapport des côtés d'un triangle d'or.

Le rapport de s est $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{k}$ et l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}})= -\dfrac{3\pi}{5}=\theta$ . ADC est isocèle donc AD=DC=BC

BD=AB-AD = (k-1)BC = $\dfrac{1}{k}$BC . Comme $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{k}$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DB}}) = \theta$ on peut dire que s(B) = D (on montre de même que s(D)=I.

*En traçant successivement les bissectrices on obtient donc une famille de triangles d'or de plus en plus petits sur une spirale qui converge vers Ω..*

C=s(A) donc $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) = \theta$ et ODAC sont cocycliques de même pour OIBC
s(C) = B donc C n'est pas invariant et O est donc l'intersection autre que C des cercles circonscrits aux triangles DAC et CIB.
s(J) = A et s(C ) =B donc 5 $(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{AB}}) = \theta = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}})$ et J est sur BC ; de même $(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) = \theta \pmod{\pi}$ car A= sos(K) et B = sos(A) donc KAC sont eux aussi alignés.
KA= $k^2$AB et KC=($k^2$-1)AB = k AB donc K et E sont les extrémités du diamètre du cercle d'Apollonius, ensemble des points M tels que MA = k MC. Comme Ω appartient à ce cercle, OBEK sont cocycliques et de plus JAK étant un triangle d'or JC et AB en sont 2 bissectrices et B le centre du cercle inscrit.
$s^5$ est une similitude d'angle π et de centre O . Or $s^5(K) = D$ et $s^5(J) = I$ donc O est à l'intersection de KD et IJ.

Dans le repère considéré A a pour affixe $k\, e^{\frac{2i\pi}{5}}$. La connaissance des 2 points A,C et de leurs images C,B permet de déterminer la formule complexe de s : $z' = -\dfrac{e^{\frac{2i\pi}{5}}}{k}(z-1)$.

Compte tenu de $e^{\frac{2i\pi}{5}} = \dfrac{1}{2k} + i\sqrt{1-\dfrac{1}{4k^2}}$ on trouve pour affixe du point invariant O.

$\omega = \dfrac{2}{3-i\sqrt{4k^2-1}} = \dfrac{3+i\sqrt{4k+3}}{2k+6}$ (simplifications obtenues à partir des propriétés de k établies au 1°

**IV 5** Par conservation du barycentre , I a pour image J par f alors que la paire {O,A} se transforme en {O,F} ou {D,E}. Si f(O) = O et f(A) = F ; $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}})$ étant de même sens , f est une isométrie directe de point invariant O , c'est donc la rotation de centre O et d'angle

droit indirect . Si $f(O)= F$ et $f(A) = O$ , les angles $(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{JF},\overrightarrow{JO}})$ étant de sens contraire, f est une isométrie indirecte et comme OF et AO ne sont pas parallèles, ce n'est pas une réflexion, c'est donc une symétrie glissée dont l'axe passe par les milieux de OF et AO et le vecteur u est égal à la moitié de $\overrightarrow{AF}$.
On étudie de même les 2 autres cas pour trouver , la rotation d'angle droit direct de centre le point de coordonnées (-0,5 ; 1,5 ) et la symétrie glissée d'axe AE et de vecteur v égal à la moitié de $\overrightarrow{AE}$ .

**IV 6** $r^2=[(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2]^n$ et $\ln(r^2)=n\ln(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2})$ . Posons $h=\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}$.

Quand n tend vers l'infini h tend vers 0 et $\frac{\ln(1+h)}{h}$ tend vers 1. En mettant $\frac{2x}{n}$ en facteur dans h on déduit que $\frac{n}{2x}\ln(1+h)$ tend vers 1, c'est à dire 2 ln r tend vers 2x. On a bien : r tend vers $e^x$.

Compte tenu des propriétés des arguments, en posant $\theta=n\alpha$ , $\tan\alpha=\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=\dfrac{y}{n+x}$

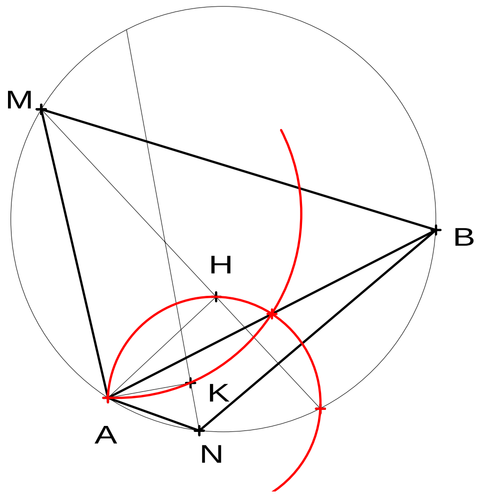
Donc n tan α tend vers y , et comme α tend vers 0 donc que $\frac{n\tan\alpha}{n\alpha}=\frac{n\tan\alpha}{\theta}$ tend vers 1 on trouve que θ a même limite que n tanα donc y . En regroupant les 2 résultats, la limite de Z est alors $e^x e^{iy}= e^z$ ce qui montre que le résultat établi pour x réel peut se prolonger pour z complexe.

**IV 7** $L_1$ est le module de $e^{2i(k+1)\frac{\pi}{7}}-e^{2ik\frac{\pi}{7}}=e^{2ik\frac{\pi}{7}}e^{i\frac{\pi}{7}}[e^{i\frac{\pi}{7}}-e^{-i\frac{\pi}{7}}]$ ; les 2 premiers termes sont de module 1 et le troisième vaut $2i\sin\frac{\pi}{7}$ donc $L_1 = 2\sin\frac{\pi}{7}$ et de même $L_2 = 2\sin\frac{2\pi}{7}$ et $L_3 = 2\sin\frac{4\pi}{7}$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{A_0A_3},\overrightarrow{A_0A_6}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_0A_6},\overrightarrow{A_6A_0}}) + (\widehat{\overrightarrow{A_6A_0},\overrightarrow{A_6A_5}}) = \frac{\pi}{7}$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{4\pi}{7}$
$A_0A_6$ est parallèle à AB , $A_6A_4$ à BC et $A_4A_0$ à AC ; une double application du théorème de Thalès montre alors que $A_6A_4A_0$ sont les milieux de AC, AB, BC ; les 2 triangles se correspondent dans l'homothétie de centre G de rapport -0,5 donc aussi les cercles circonscrits.
$A_6A_0$ est la médiatrice de $CA_2$ et $A_6A_0$ est parallèle à AB donc $CA_2$ est une hauteur de ABC ; or l'homothétie de centre G de rapport -2 transforme les médiatrices en hauteurs donc Ω en H ce qui compte tenu de $O\Omega = 3OG$ montre que O est le milieu de HΩ.
H est l'orthocentre de ABC , B celui de HAC , $A_2A_3A_5$ est le triangle orthique donc B est le centre du cercle inscrit. Le cercle circonscrit à $CA_0A_6$ est le symétrique du cercle trigonométrique par rapport à $A_0A_6$ , il est de rayon 1 et CΩ est un rayon de Γ donc vaut 2 ; $\Omega A_6$ est la médiatrice de AC , $\Omega A_0$ celle de BC donc $A_0$ et $A_6$ sont sur le cercle de diamètre CΩ.
Calculons $\Omega A_1$ dans le triangle $\Omega A_1A_4$ : $\Omega A_1^2 = \Omega A_4^2 + A_1A_4^2 - 2\Omega A_4\times A_1A_4 \times \cos(\Omega A_4 , A_1A_4)$ et comme $\Omega A_4 = 2\cos\frac{\pi}{7}$ on a $\Omega A_1^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{7} + 4\sin^2\frac{\pi}{7} - 8\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7})$ ce qui après simplification donne 4 donc $\Omega A_1 = 2$ et $A_1$ est bien sur le cercle Γ.

**IV 8**

Si ( $\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}$ ) = $\frac{\pi}{3}$, on passe de M à H
Par la similitude directe de centre A,
d'angle - $\frac{\pi}{3}$, de rapport $\frac{1}{2}$.
Si N est sur l'autre arc de C on passe de N à K par la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$, de rapport .$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Le lieu de H est constitué des 2 arcs
Images par ces similitudes des 2 arcs
correspondant de C.




**IV 10** Un sommet du pentagone doit être invariant dans la composée de 5 demi-tours qui est un demi-tour. Ce sera donc le milieu entre un point quelconque et son transformé.

**IV 12** Construction fausse mais assez bonne approximation.

**IV 13** Il faut que O' soit barycentre de (O , aire du cercle de centre O) et (A , aire de la lunule)
La condition conduit à l'équation $-r'^2r + r^2(r' - r) + r^3 = 0$ . En posant : r' = kr , on obtient
$k^3 - 2k^2 + 1 = 0 = (k-1)(k^2-k+1)$ ; or k différent de 1 et positif donc la seule solution est
$k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

**IV 14** Choisissons le sens direct ; dans la rotation d'angle 90° , le point O , centre de la table pliée a pour image le point O', centre du rectangle ABCD une fois la table dépliée : ΩOO' est donc un triangle rectangle isocèle direct d'où la position de Ω.

**IV 15** La vitesse du train est 86,4 km/h.

**IV 16** BI = 3AI donc I est à l'intersection de la demi-droite D (dans le sens de l'avion) et du cercle ensemble des points M tels que MB = 3MA. Si a est l'angle de tir et b l 'angle d'arrivée de l'avion on a aussi 3sin a = sin b, ce qui détermine a.

**IV 18** Remarquons d'abord que G' n'étant pas sur les côtés du triangle a,b,c sont non nuls, que d'autre part a+b, b+c, c+a sont également non nuls, sinon AA', BB', CC' ne pourraient être concourantes ( par exemple si b+c=0 AG' est parallèle à BC) On peut alors dire que A'=Bar[(B,b)(C,c)] et comme A'' est le symétrique de A' par rapport au milieu de BC,
A''= Bar[(B,c)(C,b)] =Bar[(B,$\frac{1}{b}$)(C,$\frac{1}{c}$)] en divisant les 2 coefficients par bc qui est non nul.
Dans le cas 1, on a : $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-\frac{1}{a}$ donc $\frac{1}{b}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{c}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{a}\overrightarrow{AA''}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{c}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{b}\overrightarrow{BB''}$

En retranchant ces 2 égalités $\frac{1}{a}\overrightarrow{AA''}=\frac{1}{b}\overrightarrow{BB''}$ donc AA'' et BB'' sont parallèles ( on aurait de même le parallélisme de AA'' et CC'')

Dans le cas 2, le point G'' existe et par associativité G''=Bar[(A, $\frac{1}{a}$)(A'', $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$)] et G'' est sur AA'' La démonstration étant identique pour BB'' et CC'' le résultat est bien établi.

**IV 19** Posons x=BU' et y=CU' ,on a x+y=a et compte tenu de l'égalité des segments de tangente issus d'un même point A b+y=c+x dont on déduit BU'=p-c et CU'=p-b Considérons alors le barycentre N de (A, p-a)(B, p-b)(C, p-c), U' est alors barycentre partiel de B et C et ANU' sont alignés (résultats analogues pour BNV' et CNW' ).
Si la bissectrice AI coupe BC en A', l'étude des aires de ABA' et ACA' montre que BA' et CA' sont proportionnels à c et b, donc que A' est barycentre de (B, b) et (C, c) et selon les résultats analogues pour les autres bissectrices que I est bien barycentre de (A, a)(B, b)(C, c) On peut alors écrire :
quel que soit O , $2p\overrightarrow{OI}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$ et $p\overrightarrow{ON}=(p-a)\overrightarrow{OA}+(p-b)\overrightarrow{OB}+(p-c)\overrightarrow{OC}$
et en ajoutant, $2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OG}$.
G est donc barycentre de (I,2) et (N,1) et les 3 points sont alignés.
I' étant le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, IBI' et ICI' sont rectangles donc IBI'C sur le cercle de diamètre II'. La médiatrice de BC passe donc par le milieu de II' et par projection les points U et U' sont symétriques par rapport au milieu de BC. Le théorème de réciprocité barycentrique (voir page précédente) permet alors d'affirmer que AU, BV, CW sont aussi concourantes en un point K barycentre de A, B, C avec des coefficients inverses de ceux de N.
L'aire de ABC étant la somme des aires de AIB, BIC, CIA, on a de suite S = pr.
Par le théorème de Thalès on peut obtenir $\frac{R}{r}=\frac{p}{p-a}$ et comme les triangles CIU et CI'U' ont des angles égaux donc sont semblables : $\frac{I'U'}{UC}=\frac{U'C}{UI}$ soit encore Rr=(p-b)(p-c) et en multipliant les 2 égalités : $R^2=\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}$ d'où successivement les formules de R, r, et S.

**IV 20** Si M est barycentre de (A,4)(B,2)(C,1)(D,2) on montre par associativité que M est sur GL et FI donc que M = O donc $3\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FI}$ et $3\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GL}$. On a des résultats analogues pour P, Q, R et on en déduit $3\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{AC}$.

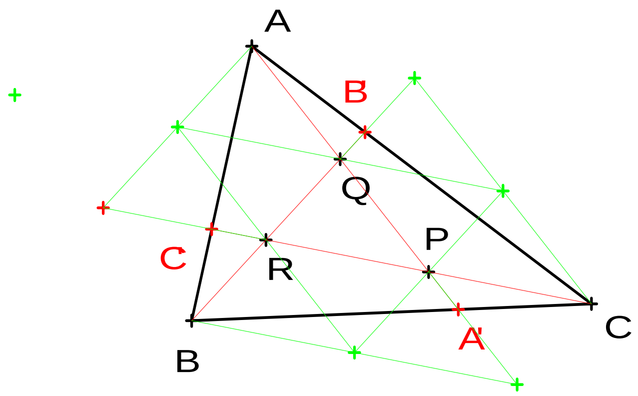
**IV 21** Si P=Bar[(A,a)(B,b)(C,c)] le barycentre partiel de [(B,b)(C,c)] est un point de BC aligné avec AP , c'est donc le point A' et $\overrightarrow{CA'}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$ ce qui donne compte tenu des hypothèses c=2b En procédant de même avec C'=Bar[(A,a)(B,b)] on aura b=2a donc P=Bar[(A,a)(B,2a)(C,4a)] et par propriété du barycentre on peut donc prendre a=1,b=2,c=4 ( on remarquera que P étant intérieur au triangle les coefficients sont de même signe et les sommes partielles comme b+c sont non nulles ) . La même démonstration donne Q=Bar[(A,4)(B,1)(C,2)] et R=Bar[(A,2)(B,4)(C,1)].
Par barycentre partiel P=Bar[A,1)(A',6)] et $\overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AA'}$ et comme $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{7}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}(2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})$ on a bien Q milieu de AP. Pour comparer les surfaces on peut envisager 3 méthodes :

* En comparant des triangles de même hauteur et avec S = aire de ABC on a successivement :

aire(ABA')=$\frac{2}{3}$ S , aire(A'QB)= $\frac{8}{21}$ S ,aire(A'QR)=$\frac{4}{21}$ S et enfin aire(PQR) =$\frac{1}{7}$ S.

$*$ En traçant des parallèles aux côtés du triangle PQR par P,Q,R,A,B,C on obtient un quadrillage faisant apparaître des triangles tous égaux à PQR (Puzzle de Mikuzinski) et pour des raisons de symétrie on peut compenser les morceaux qui sont à l'extérieur de ABC et ceux qui sont à l'intérieur pour couvrir ABC avec 7 triangles égaux à PQR (voir figure en annexe ).

$*$ On peut aussi utiliser directement les propriétés du produit vectoriel de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en exprimant ces vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.




**IV 22** On peut écrire I=Bar[(A,a)(A',a')]=Bar[(B,b)'B',b')]=Bar[(C,c)(>>C',c')] en supposant de plus que : a+a'=b+b'=c+c'=1 d'où $a\overrightarrow{IA}+a'\overrightarrow{IA'}=b\overrightarrow{IB}+b'\overrightarrow{IB'}$ donc $a\overrightarrow{IA}-b\,IB=b'\overrightarrow{IB'}-a'\overrightarrow{IA'}$ (relations analogues avec BC et avec CA) Or $a-b\neq 0$ sinon a'= b' et AB est parallèle à A'B' (Thalès) En posant $G_1$ =Bar[(A,a)(B,-b)] on obtient $a\overrightarrow{IA}-b\overrightarrow{IB}=(a-b)\overrightarrow{IG_1}$.

De même $b'\overrightarrow{IB'}-a'\overrightarrow{IA'}=(b'-a')\overrightarrow{IG_2}$ avec $G_2$=Bar[(B',b')(A',-a')]. Mais comme a-b=a'-b' on en déduit que $G_1=G_2$ et que ces points situés sur AB et sur A'B' sont donc confondus avec C'' donc $a\overrightarrow{IA}-b\overrightarrow{IB}=(a-b)\overrightarrow{IC''}$. En additionnant les 3 relations similaires on obtient :

$0=(a-b)\overrightarrow{IC''}+(b-c)\overrightarrow{IA''}+(c-a)\overrightarrow{IB''}$ ce qui signifie que C''=Bar[(A'',b-c)(B'',c-a)] et qui prouve donc que A'', B'', C'' sont alignés.

**IV 23** Appelons ce barycentre $A'_1$ ; on a $\overrightarrow{AA'_1}=\frac{(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AB}+(a^2+c^2-b^2)\overrightarrow{AC}}{2a^2}$, d'où $\overrightarrow{AA'_1}.\overrightarrow{BC}=0$ en utilisant $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$. Puisque $AA'_1$ est orthogonal à BC c'est que $A'_1=A_1$ ; on en déduit $2a^2\overrightarrow{LA_1}=(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{LB}+(a^2+c^2-b^2)\overrightarrow{LC}$ ; par définition de L on a :$2a^2\overrightarrow{LA}+2b^2\overrightarrow{LB}+2c^2\overrightarrow{LC}=0$.
On en déduit $2a^2\overrightarrow{LA''}=(a^2-b^2-c^2)\overrightarrow{LA'}$ (R) et L = bar(A';$b^2+c^2-a^2$)(A'';$2a^2$) donc sur A'A''.
La projection conserve le barycentre donc $L_1$ = bar(A';$b^2+c^2-a^2$)($A_1$;$2a^2$) et $\overrightarrow{LL_1}=\frac{2a^2\overrightarrow{LA_1}-2a^2\overrightarrow{LA''}}{k}$

donc $\frac{2a^2\overrightarrow{A''A_1}}{k}$ et comme $S = aA''A_1$; on déduit $LL_1 = \frac{2aS}{k}$ (R').

Si $LL_1$ coupe DE en $L'_1$ alors $LL'_1 = a+LL_1$ et $\frac{LL'_1}{LL_1} = 1+\frac{k}{2S} = p$. Ce rapport est le même pour $L_2$ ; $L_3$ donc l'homothétie de rapport p; transformant une droite en une parallèle; transforme ABC en $A_2B_2C_2$.

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AL}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AL}}{AB\times AL} = \frac{b^2+q}{b\sqrt{b^2+c^2+2q}}$ en posant $q = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et avec $AL^2 = \frac{b^4c^2+b^2c^4+2b^2c^2q}{k^2}$

$\cos(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}}{AG\times AC}$ et $AG^2 = \frac{b^2+c^2+2q}{9}$; les cosinus sont égaux et comme G et L sont intérieurs au triangle (coefficients positifs) les 2 angles sont égaux et AI est bissectrice de (AL,AG).

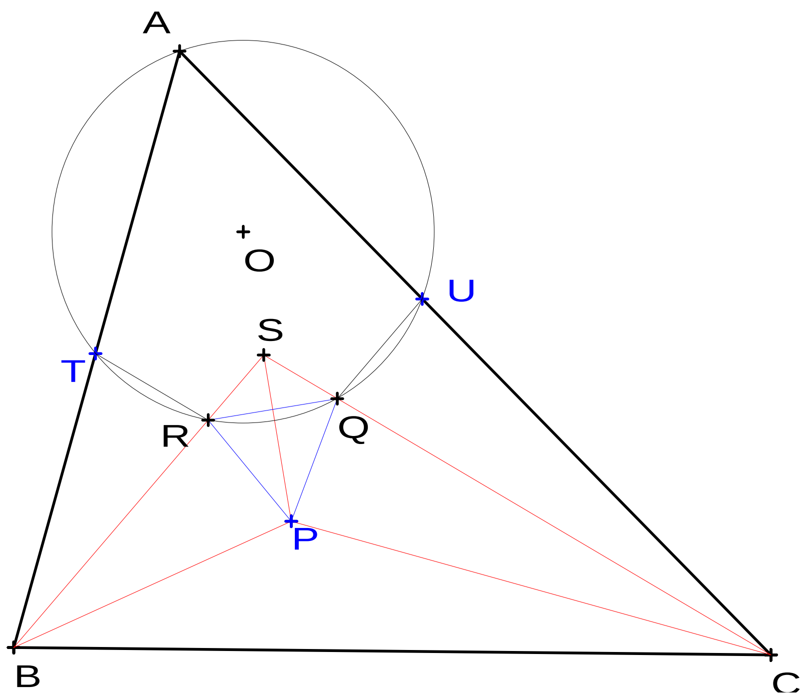
**IV 24** PS étant axe de symétrie, PRQ est un triangle isocèle avec un angle de $\frac{\pi}{3}$. Dans le triangle BSC l'angle $\widehat{BSC}$ vaut π-2b-2c et dans le triangle SRQ isocèle les 2 autres angles valent b+c

$\widehat{QRT} = \widehat{QRS} + \widehat{SRT}$ et $\widehat{SRT} = \widehat{SRP} = \widehat{PRQ} + \widehat{QRS}$ = donc $\widehat{QRT} = b+c+\frac{\pi}{3}+b+c = \pi - 2a$ (id $\widehat{RQU}$ )

Les points TRQU vérifient TR=RQ=QU et $\widehat{QRT} = \widehat{RQU} = \pi\text{-}2a > \frac{\pi}{3}$ donc TRQ et RQU sont isocèles et isométriques donc RTQ = RUQ et TRQU sont cocycliques sur un cercle de centre O.

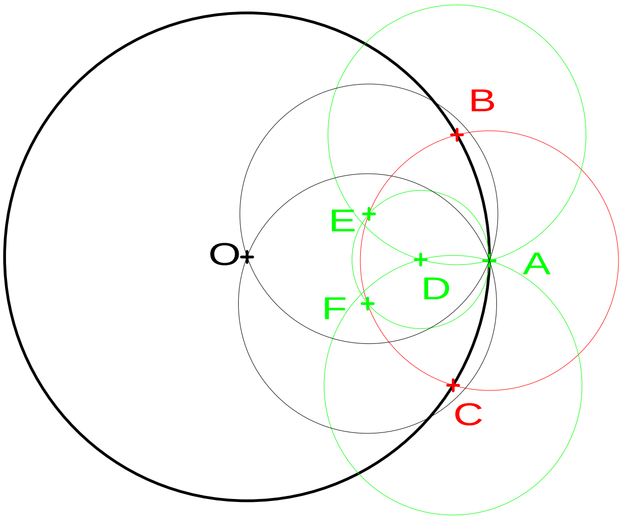
2 $\widehat{ORT} = \widehat{QRT} = \pi\text{-}2a$ et comme OTR est isocèle; $\widehat{ROT} = 2a = \widehat{ROQ} = \widehat{QOU}$ et $\widehat{TOU} = 6a = 2\widehat{TAU}$

D'après le th de l'angle inscrit; A est sur le cercle de centre Oet par égalité des cordes; AR et AQ sont les trissectrices de l'angle A.



**IV 25**
Un cercle de centre A de rayon r (quelconque) coupe le cercle initial en B et C. Les cercles de centres B et C de rayon r se coupent en D. ABCD est un losange de centre I et les puissances de I par rapport aux 2 cercles montrent que $IO^2 - R^2 = IA^2 - r^2$ et comme IO+IA=R on en déduit que $DA = \dfrac{r^2}{R}$

Le cercle de centre D passant par A coupe le cercle de centre A en E et F et les cercles de centres E et F passant par A se recoupent en O'.
AEFO' est aussi un losange de centre J donc les Points ADO'O sont alignés
Par puissance de J par rapport aux Différents cercles $JA^2 - r^2 = JD^2 - \dfrac{r^4}{R^2}$
On en déduit AO' = R donc O = O'




**IV 26** Si $z = x$; $Z = \dfrac{x^2+1}{2x}$ est réel et décrit $\mathbb{R}$ - ] –1 ;+1[. Si $z = iy$; $Z = \dfrac{i(y^2 - 1)}{2y}$ décrit $i\mathbb{R}$

Réciproquement; si Z est imaginaire z aussi; alors que si Z est réel on obtient z réel ou $|z| = 1$

Si $z = r\,e^{it}$; $Z = \dfrac{1}{2}(r + \dfrac{1}{r})\cos t + \dfrac{i}{2}(r - \dfrac{1}{r})\sin t$ Si r=1 ; Z décrit [-1 ;+1] ; si r > 1 on a $X = a\cos t$, $Y = b\sin t$ et l'ensemble des points est une ellipse de centre O , t étant l'anomalie excentrique (Le point de l'ellipse est à la verticale du point d'abscisse a cost). Si r<1 on obtient le même résultat avec t' = - t.

Pour t fixé (différent de $k\dfrac{\pi}{2}$) on trouve $\dfrac{X^2}{\cos^2 t} - \dfrac{Y^2}{\sin^2 t} = 1$, équation d'une hyperbole.

**IV 27** On a $z\bar z = a\bar a$ et $|z - a| = (z + \bar z)^2$ donc $z^2 + \bar z^2 + a\bar z + \bar a z = 0$

D'où $z^4 + \bar a z^3 + a^2\bar a z + a^2\overline{a^2} = 0 = (z + \bar a)(z^3 + a^2\bar a) = 0$. Les 3 racines cubiques de $a^2\bar a$ ont pour images les sommets d'un triangle équilatéral.

**IV 28** Soit P un point de [BC], $P_1$ et $P_2$ les symétriques de P par rapport aux côtés. Le périmètre p est aussi la longueur de $P_1QRP_2$ qui est minimale si ces points sont alignés et vaut 2 IJ, AIPJ étant sur le cercle de diamètre AP , le minimum est alors obtenu si AP est minimum, donc si P est le pied de la hauteur. La solution est le triangle orthique, obtenu en joignant les pieds des hauteurs, ces mêmes hauteurs étant les bissectrices du triangle orthique.

**IV 29** On envisage l'arbre : demi-tour (oui/non), symétrie dans l'axe (oui/non), symétrie orthogonale à l'axe (oui/non), symétrie glissée (oui/non), pour obtenir les 7 cas.

**V 1** La solution (rarement trouvée !) est 40,1 cm car il n'y a que 10 tomes et 2 couvertures entre les pages extrêmes.

**V 2** Il peut fumer 6 cigarettes en empruntant un mégot qu'il rend après avoir fumé la dernière.

**V 4** Le nombre d'œufs est $2^n - 1$ si n est le nombre de clients.

**V 5** La deuxième est bien sur plus avantageuse !

**V 7** N'oubliez pas que le facteur voit le numéro de la porte d'en face et que s'il hésite c'est qu'il y a plusieurs solutions ce qui ne se produit qu'avec 13 (6-6-1 ou 9-2-2).

**V 8** La vitesse du nageur est constante par rapport à un repère mobile lié au chapeau. Il lui faudra donc 10 minutes pour rattraper le chapeau et comme le chapeau a parcouru 1000 mètres en 20 mn la vitesse du courant est de 3 km/h.

**V 9** Il faut tenir compte que l'herbe pousse ! Si y est, en proportion de la quantité initiale, la quantité d'herbe qui pousse en un jour et q la quantité mangée par jour par une vache, on obtient $q = \frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 60y}{30 \times 60}$ ce qui donne y et q et montre que la solution est 20 vaches.

**V 10** Il y a 2 directions sud différentes, ce qui n'a lieu qu'au pôle nord où les ours sont blancs.

**V 11** On peut écrire $(2x)^2 < x + 4x^2 < y^2 < 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ ce qui est absurde en nombres entiers (*mais j'espère qu'a votre âge vous ne croyez plus aux contes de fées*).

**V 12** La réponse est 88/7 car ce sont les intervalles qu'il faut compter.

**V 13** Claude et Dominique sont-ils des garçons ou des filles ? Envisagez les différents cas.

**V 17** Si L est la longueur du lac, les 2 bateaux ont, à eux deux, parcouru L à leur premier croisement et 3L à leur second. Il faut 3 fois plus de temps, donc en analysant les trajets du premier bateau : $3 \times 500 = L + 300$ (On trouve aussi que le rapport des vitesses est 7/5).

**V 18** Mr Biche a tué un cerf et raté un lièvre, Mr Cerf a tué un lièvre et raté un chevreuil, Mr Lièvre a tué un chevreuil et raté un sanglier, Mr Sanglier a tué une biche et raté un cerf et Mr Chevreuil a tué un sanglier et raté une biche.

**V 20** Soit H la projection de A sur (BC), I et J les milieux de [AB] et [AC]. Découper suivant HI et HJ pour pouvoir reformer le triangle sur son envers.

**V 21** Il faut 17 mn en faisant d'abord passer les 2 plus rapides, dont l'un revient, puis les 2 plus lents en faisant revenir celui des 2 rapides qui était resté.

**V 23** Plier la feuille en 2 dans le sens de la longueur puis plier de nouveau à partir du coin en bas à gauche de manière à amener le coin en bas à droite sur la pliure centrale. Vous avez en bas un angle de 60 degrés et il ne reste plus qu'à terminer les pliages des 2 morceaux qui dépassent.

**V 25** Le Norvégien est diplomate, boit de l'eau, a un renard et habite dans la maison jaune.
Le médecin est Ukrainien, boit du thé, a un cheval et habite dans la maison bleue.

L'Anglais est sculpteur, boit du lait, a des escargots et habite dans la maison rouge.
Le violoniste est Espagnol, boit l'orange, a un chien et habite dans la maison blanche.
Le Japonais est acrobate, boit du café, a un zèbre et habite dans la maison verte.

**V 26** Il ne connaît pas Alice qui ne connaît que Yolande, il connaît Xavier qui connaît tout le monde sauf Alice, ne connaît pas Bertrand, connaît Céline et ainsi de suite. Il connaît une personne sur deux, donc 13 personnes.

**V 27** A chaque homme qui a une femme à sa droite, on associe le premier homme à sa droite, ce dernier aura une femme à sa gauche. Or on a défini une bijection ; 11 hommes ont aussi une femme à leur gauche (indépendamment du nombre de convives).

**V 28** Il y a 8 femmes seules, 11 hommes et 6 couples.

**V 29** 3 solutions : Il habite au 2 s'il y a 4 étages, au 5 s'il y a 8 étages ou au 10 s'il y a 15 étages.

**V 30** Une seule : celle de la page 999.

**V 33** Appelons ABCD les maris de abcd et codons départ/île/arrivée; voici la manœuvre :
ABCDab/cd/- ;ABCDabc/d/- ;ABCDa/bcd/- ;ABCDab/cd/-Abab/CDcd/-Abab/Cc/Dd ;Abab/CDc/d
Abab/c/CDd ;ABCab/c/Dd ;ABC/abc/Dd ;ABCa/bc/Dd ;Aa/bc/BCDd ;Aa/bcd/BCD ;Aa/d/BCDbc
Ada/d/BCbc ;a/d/ABCDbc ;ac/d/ABCDb ;-/d/ABCDabc ;-/cd/ABCDab ;-/-/ABCDabcd

**V 35** Prendre le wagon sur CE, le tirer en CD puis le pousser sur AB ; puis par C et E aller accrocher les 2 wagons.

**V 36** Vous avez bien sûr reconnu $5^{33}$ et $2^{33}$ !

**V 37** C'est la division de 631938 par 625 qui donne 1011,1008.
En effet le diviseur ne se termine pas par 0 (avant-dernière soustraction partielle) et n'est pas un diviseur de 1000 puisqu'il y a 4 chiffres après la virgule, et pourtant son produit par le dernier chiffre du quotient donne un multiple de 1000 (dernière soustraction) donc le diviseur est 625 et le denier chiffre est 8. Les autres chiffres du quotient ne peuvent être que 0 ou 1 (3 chiffres seulement dans les produits partiels).

**V 38** Papi allume un interrupteur 5 minutes, l'éteint et en allume un autre avant de monter. Il y a alors 3 cas : lampe allumée, lampe chaude, lampe froide.

**V 39** Il fait pipi dans le tuyau pour faire remonter la balle !

**V 41** On part de la fin : si l, m, s sont les nombres de loups, de moutons et de serpents un certain jour, il y avait la veille l+s, l+m+s, m+s et en remontant 14 fois on obtient 172695 loups, 303056 moutons et 228770 serpents.

**V 42** Il faut bien sûr compter que les défenseurs qui sont dans un coin défendent 2 côtés.

**V 43** Il faut mettre une tasse dans une autre et un nombre pair de pièces dans la tasse qui en contient une autre ; ce qui donne 15 solutions.

**V 44** On peut partager la table en 64 carrés de 12,5 cm de côté. D'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement un petit carré qui contient 3 miettes. L'aire de ce triangle est inférieure à un demi-carré, soit 78,125 cm².

**V 45** Il faut des poids de 1, 3, 9, 27

Plus généralement si on met en place la suite $u_0 = 1$, $u_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} u_k$ c'est-à-dire les puissances de 3. On peut alors effectuer toutes les pesées jusqu'à la somme des n poids.

**V 46** Cela provient des dates différentes selon les pays du changement de calendrier et de l'adoption du calendrier grégorien. A Rome, en Espagne et au Portugal, le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre. En France le lendemain du dimanche 9 décembre 1582 fut le lundi 20 décembre. Aux Pays-Bas le lendemain du jeudi 14 décembre 1582 fut le jour de Noël. En Allemagne et en Suisse le changement eut lieu en1584, en Pologne en 1586, en Hongrie en 1587, les états protestants changèrent vers 1700. En Angleterre le lendemain du mercredi 2 septembre 1752 fut le jeudi 14 septembre (le retard s'étant accumulé atteignait 11 jours ). En Suède la réforme eut lieu en 1752, au Japon en 1873, en Chine en 1912. L'URSS passa du mercredi 1er février 1918 au jeudi 14 février (c'est pourquoi la révolution qui eut lieu le 24 octobre 1917 est maintenant fêtée le 6 novembre). La Roumanie changea en 1919, l'église orthodoxe le 30 septembre 1923, la Turquie en 1924…. !

**V 48** N'importe quel entier n peut s'écrire $-\log_2\left[\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}\right]$, avec n racines carrées.

**V 49** La réponse est bien sûr 250 kg.