

Thème : grandeurs et mesures

L'activité :

[PBDUDU5 \(la tasse vs le verre\).mp4](#)

<http://mathix.org/linux/problemes-ouverts/les-problemes-dudu>

(Saison 1 Pb5 : deux verres identiques ?)

Propositions et pistes

1) Quelles compétences mathématiques sont mises en jeu dans cette activité ?

Chercher	Extraire l'information, reformuler, organiser. S'engager dans une démarche. Tester, essayer
Modéliser	Traduire en langage mathématique une situation réelle Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique
Représenter	Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique). Utiliser produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales (schéma, croquis, patron).
Raisonner	Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées. Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. Démontrer. Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Calculer	Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée. Calculer en utilisant un langage algébrique
Communiquer	Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul ...).

2) Quelle place dans l'apprentissage de la notion dans ce thème (niveau 1, 2 ou 3) ?

On se place au niveau 4^{ème} ou 3^{ème} (seconde partie du cycle 4 en fonction des progressions choisies et des repères de progressivité sur grandeurs et mesures ainsi que sur le calcul littéral). Les élèves sont habitués à travailler avec les solides de l'espace et à calculer leurs volumes.

Notions mathématiques en jeu :

Développer la vision dans l'espace

Mobiliser la formule du volume du cylindre

Mobiliser les formules du périmètre du cercle et de l'aire du disque.

Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, réfuter ou valider une conjecture.

Exercice à prise d'initiatives, niveau 2 (sur 3)

3) Quel(s) scénario(s) en classe (individuel, groupe ...) ?

La vidéo est présentée 3 fois aux élèves, puis travail de recherche et de restitution par groupes de 3 ou 4 élèves (groupes de niveau plutôt homogènes), pendant 20 minutes. Une copie relevée par groupe.

Si la salle est équipée de quelques postes informatiques, possibilité pour les élèves de faire des conjectures à l'aide d'un tableur. Sinon prévoir un temps collectif de qqs min d'utilisation du tableur puisque, et c'est bien normal, bcp ont testé sur des valeurs numériques (d'où possibilité d'utilisation pour introduire calcul littéral autrement qu'avec des programmes de calcul).

4) Quelles pistes de différenciation (niveau d'exigence, partage des tâches, remédiation, approfondissements ou prolongements, ...) ?

Prolongement : différenciation en termes de compétences suite au premier travail diversement réussi.

Voici quatre productions de groupes :

N°1 : Erreur de raisonnement

nous avons essayé avec rayon = 1 cm hauteur = 2 cm
 $(V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2 \times 3,14 = 6,28)$
 puis avec rayon = 0,5 cm hauteur = 4 cm
 $(V = \pi \times 0,5^2 \times 4 = 3,14 \times 1 = 3,14)$
 $6,28 = 2 \times 3,14$
 Conclusion : le volume de la tasse est égal au double du volume du verre.

N°2 : Manque de communication

$$\frac{\pi \times (R \times 2)^2 \times \frac{h}{2}}{2} = \frac{\pi \times R \times 2 \times R \times \frac{h}{2}}{2} = \pi \times R^2 \times h \times 2$$
 Tasse > Verre

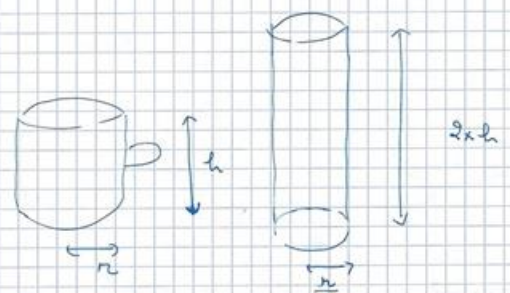
N°3 : Modélisation non aboutie

rayon petit verre : 2,5 cm
 rayon grand verre : 5 cm
 hauteur petit verre : 20 cm
 hauteur grand verre : 10 cm
 Calculons le volume du petit verre : $\pi \times 2,5^2 \times 20 = 125\pi$
 Calculons le volume du grand verre : $\pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$
 Donc c'est le double.
 On peut le vérifier avec d'autres nombres :
 $\pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi$
 ~~$\pi \times 6^2 \times 3,5 = 126\pi$~~
 $\pi \times 6^2 \times 3,5 = 126\pi$

	A	B	C	D	E	F
1	Rayon	Hauteur	Volume	Nouveau rayon	Nouvelle hauteur	Nouveau volume
2	0	0	0	0	0	0
3	1	1	3,14	0,5	2	1,57
4	2	2	25,12	1	4	12,56
5	3	3	84,78	1,5	6	42,39
6	4	4	200,96	2	8	100,48
7	5	5	392,5	2,5	10	196,25
8	6	6	678,24	3	12	339,12
9	7	7	1077,02	3,5	14	538,51
10	8	8	1607,68	4	16	803,84
11	9	9	2289,06	4,5	18	1144,53
12	10	10	3140	5	20	1570
13	11	11	4179,34	5,5	22	2089,67
14	12	12	5425,92	6	24	2712,96
15	13	13	6898,58	6,5	26	3449,29
16	14	14	8616,16	7	28	4308,08
17	15	15	10597,5	7,5	30	5298,75
18	16	16	12861,44	8	32	6430,72
19	17	17	15426,82	8,5	34	7713,41
20	18	18	18312,48	9	36	9156,24
21	19	19	21537,26	9,5	38	10768,63
22	20	20	25120	10	40	12560
23						

Modélisation aboutie ?

N°4 : Erreur de calcul littéral



 $V = \pi \times r^2 \times h$
 $V = \pi \times \frac{r}{2}^2 \times 2 \times h$
 $= \pi \times \frac{r^2}{4} \times 2 \times h$
 Conclusion : les 2 volumes sont égaux

Le professeur demande à chaque groupe de travailler sur une compétence non acquise.


N°1 : Compétence de raisonnement

nous avons essayé avec rayon = 1 cm hauteur = 2 cm
($V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2 \times 3,14 = 6,28$)
puis avec rayon = 0,5 cm hauteur = 4 cm
($V = \pi \times 0,5^2 \times 4 = 3,14 \times 1 = 3,14$)
 $6,28 = 2 \times 3,14$
Conclusion: le volume de la tasse est égal au double du volume du verre.

(insister cependant sur le fait que c'est déjà tb)

- Égalité pour une valeur particulière vs égalité pour toute valeur
- "Implicite sur le quantificateur"
- Faire comprendre à l'élève qu'il a une conjecture forte mais pas une démonstration
- Proposer un énoncé avec un exemple frappant mais où la recherche d'un contre-exemple montre à l'élève qu'une situation d'exemple n'a pas valeur de démonstration générale... Par exemple :

L'aire du carré est 16
Le périmètre du carré est 16
Dans tous les carrés, l'aire est égale au périmètre.
Que pensez-vous de l'affirmation?



N°2 : Manque de communication

$$\pi \times (R \times 2)^2 \times \frac{h}{2} = \pi \times R \times 2 \times R \times \cancel{2} \times \frac{h}{\cancel{2}} = \pi \times R^2 \times h \times 2$$

Tasse > Verre

- Pas de souci sur le calcul littéral
- Quelqu'un qui ne connaît pas le sujet ne peut reconstituer l'exercice et apprécier la démarche

Remédiation proposée :

1/ Voici une production d'élèves. Pouvez-vous retrouver l'énoncé ?

$$2x \times 2 + \frac{2y}{2} = 4x + y = 5x$$

Rectangle > Carré

On dispose d'un carré, on multiplie une dimension par 2 et l'on divise l'autre par 2. Le rectangle obtenu a-t-il un périmètre égal au carré initial ? Cela dépend-il du carré choisi au départ ?

2/ Exercice de communication croisée entre groupes type construction en géométrie (figure / protocole de construction) ou sur Scratch (scénario à la main / programmation...)

N°3 : Modélisation non aboutie

	A	B	C	D	E	F
1	Rayon	Hauteur	Volume	Nouveau rayon	Nouvelle hauteur	Nouveau volume
2	0	0	0	0	0	0
3	1	1	3,14	0,5	2	1,57
4	2	2	25,12	1	4	12,56
5	3	3	84,78	1,5	6	42,39
6	4	4	200,96	2	8	100,48
7	5	5	392,5	2,5	10	196,25
8	6	6	678,24	3	12	339,12
9	7	7	1077,02	3,5	14	538,51
10	8	8	1607,68	4	16	803,84
11	9	9	2289,06	4,5	18	1144,53
12	10	10	3140	5	20	1570
13	11	11	4179,34	5,5	22	2089,67
14	12	12	5425,92	6	24	2712,96
15	13	13	6898,58	6,5	26	3449,29
16	14	14	8616,16	7	28	4308,08
17	15	15	10597,5	7,5	30	5298,75
18	16	16	12861,44	8	32	6430,72
19	17	17	15426,82	8,5	34	7713,41
20	18	18	18312,48	9	36	9156,24
21	19	19	21537,26	9,5	38	10768,63
22	20	20	25120	10	40	12560
23						

- Les très nombreux tests ne permettent pas d'avoir une certitude (idem situation1)
- A-t-on vraiment testé toutes les valeurs ?
- Choix discutable de prendre Rayon = hauteur pour le premier cylindre...
- Début de modélisation bien présent (la formule est gérée mais non verbalisée, une recherche "systématique est organisée...)
- Le tableur permet de la précision mais pas de réponse exacte en vue !
- Le groupe doit donc améliorer sa production en travaillant sur la compétence « modéliser ».

Remédiation proposée :

1/ Pour montrer que l'on peut ne jamais aboutir à une réponse définitive même en poussant la précision avec une recherche uniquement numérique.

Demander aux élèves pour d'autres valeurs (décimales ...)

Ou autre Pb possible : On dispose de deux nombres de produit 12 ; on effectue leur somme. Quel est le plus grand résultat possible ? (Même si l'objectif est d'établir une conjecture, on pourra toujours donner aux élèves raisonnant avec des valeurs décimales qu'il n'ont pas la réponse optimale...)

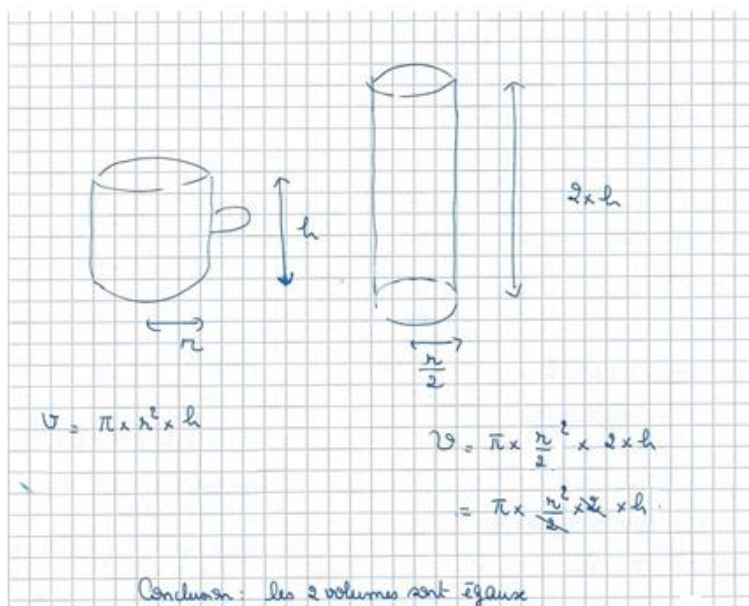
2/ Pour souligner que la modélisation est à portée de main :

Compléter le tableau suivant en indiquant uniquement les calculs réalisés. Peut-on conclure maintenant ?

Pour la dernière ligne, on pourra s'aider des formules employées dans le tableur...

Rayon	hauteur	Volume	Nouveau Rayon	Nouvelle hauteur	Nouveau Volume
6	4				
10	8				
R	h				

N°4 : Erreur de calcul "littéral"

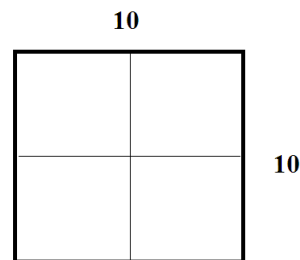


- Souligner l'incohérence avec la conclusion des autres groupes sur quelques exemples...
- Chercher la ou les erreurs en vérifier sur un exemple que certaines expressions ne sont pas égales...
Eventuellement pas à pas avec la calculatrice

Remédiation proposée : Calculer $\frac{10^2}{2}$, $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, $\frac{10^2}{2^2}$.

A quelle aire (carré ci-contre) chacun de ces trois calculs fait-il référence ?

Est-il vrai que les trois expressions $\frac{x^2}{2}$, $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ et $\frac{x^2}{2^2}$ sont toujours égales ?



(Objectif : revenir sur le sens du carré ! Donner une interprétation en termes de grandeur et une schématisation)

Remarque : On peut aussi trouver $x^2 = 2x$ régulièrement (remédiation avec des aires sur un fond quadrillé)

Approfondissement possible

Pour les groupes pour lesquels les compétences sont acquises, voici des exemples de prolongements

1. Déterminer la relation entre les deux volumes pour un facteur différent de 1/2 .
2. Une activité de niveau 3 : tâche complexe (Dan Meyer) : [popcorn 2.mp4](#)
3. On pourra proposer aux élèves de construire deux cylindres de révolution après avoir tracé leurs patrons.

On pourra mettre à la disposition des élèves du sable afin qu'ils puissent remplir leurs solides pour :

- Comparer la contenance des deux solides.
- Peser le sable contenu dans chacun des deux solides.
- Calculer la masse volumique.
- Travailler la conversion d'unités.