MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Académie de Montpellier

Mercredi 15 mars de 8 h à 10 h : exercices nationaux

- Pause de 10h à 10h10 -

Mercredi 15 mars de 10h10 à 12h10 : exercices académiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 9h 30.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices :**

- **Les candidats de la série S** traitent les exercices numéro 1 (*Somme de carrés en abyme*) et numéro 2 (*1, 2, 3 … dallez !*).
- **Les autres candidats** traitent les exercices numéro 1 (*Somme de carrés en abyme*) et numéro 3 (*Boîte de canelés bordelais*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. *a.* Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, …, $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. *a.* Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*

Entrer u
  Tant que $(u \neq 1 \text{ et } u \neq 4)$
  $u \leftarrow f(u)$
  Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.
5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.
a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.
b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

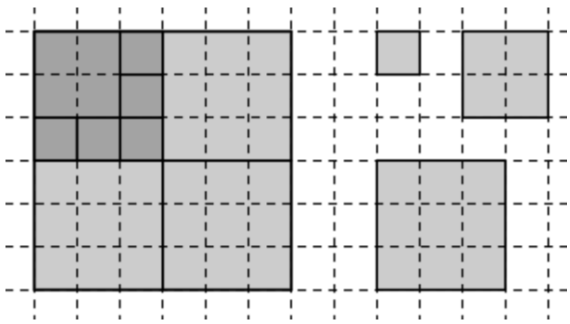
Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.
6. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.
b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $(p \geq 4)$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.
c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

1, 2, 3 …dallez !

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.
Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.
On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. ***a.*** Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?
b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.
c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.

3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

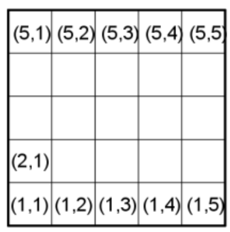
On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. ***a.*** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n+6$ est impair et non multiple de 3.
b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n+6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. ***a.*** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.
b. Montrer que $u(13) \leq 1$.
c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?

6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i,j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n=5$).
On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i,j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.



a. Exprimer en fonction de n, la somme des coefficients de toutes les cases de K_n.
b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n, alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou −3.
c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
e. Conclure que, pour tout entier n :
- $u(n) = 0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;
- $u(n) = 1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.
1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
2. ***a.*** Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.
c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. ***a.*** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. ***a.*** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
b. Et pour répartir 75 canelés ?
c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.
a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?
b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?