Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Montpellier

Académie de Montpellier

Mercredi 15 mars 2017 de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices Académiques

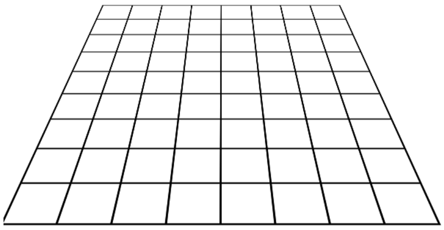
Les candidats traitent **deux exercices :**

- **Les candidats de la série S** traitent les exercices numéro 1 (*les cartes bicolores*) et numéro 2 (*les rectangles sympathiques*).
- **Les autres candidats** traitent les exercices numéro 1 (*les cartes bicolores*) et numéro 3 (*empilement d'oranges*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

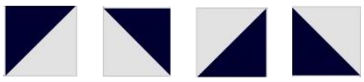
Les cartes bicolores

On dispose d'une ***surface rectangulaire orientée*** (Nord/Sud - Est/Ouest) sur laquelle est tracé un quadrillage régulier formé de cases carrées, et de ***cartes carrées bicolores*** (identiques à celle donnée ci-dessous) dont les dimensions sont égales à celles d'une case du quadrillage.

nord  sud	
Surface rectangulaire quadrillée	*Carte bicolore*

Il s'agit de ***recouvrir toutes les cases du quadrillage*** avec ces cartes bicolores, en respectant les deux contraintes suivantes :

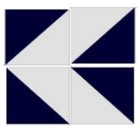
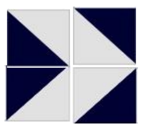
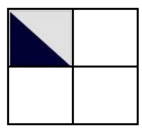
- les cartes seront disposées dans les cases du quadrillage dans une des quatre positions suivantes :



- ces cartes bicolores sont disposées de sorte que, **quand elles ont un bord commun, les parties ayant ce bord commun (dites "adjacentes") ont la même couleur**.

1. Dans cette partie, le quadrillage forme un carré quadrillé par $n \times n$ cases (où n est un entier naturel).

a. Pour $n = 2$, voici trois dispositions possibles respectant les deux contraintes (*dispositions 1, 2 et 3*) :

nord  sud	nord  sud	nord  sud	nord  sud
Disposition 1	Disposition 2	Disposition 3	Disposition 4 (incomplète)

Proposer (en les représentant sur la copie) deux façons différentes de compléter la quatrième disposition en respectant les deux contraintes.
Déterminer le nombre de façons différentes de recouvrir un quadrillage de 2×2 cases en respectant les deux contraintes données.

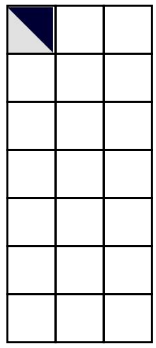
b. Pour un entier naturel n quelconque non nul, combien existe-t-il de façons différentes de recouvrir un quadrillage de $n \times n$ cases en respectant les deux contraintes données ?

2. Dans cette deuxième partie, le quadrillage forme un rectangle quadrillé par $m \times n$ cases (le cas $m = n$ étant étudié dans la partie précédente, on prendra $m > n > 0$).

   a. Reproduire le quadrillage 7×3 ci-contre et le compléter à partir de la carte qui est donnée (en respectant les deux contraintes données).

   b. Combien existe-t-il de façons différentes de recouvrir un quadrillage de $m \times n$ cases ($m > n > 0$) en respectant les deux contraintes données ?

nord



sud

Exercice académique numéro 2
(à traiter par les candidats de la série S)

Les rectangles sympathiques

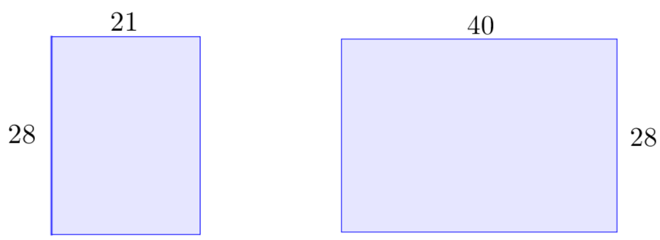
Soit a et b deux entiers naturels tels que $0 < a \leq b$.
Le rectangle de largeur a et de longueur b est noté $(a ; b)$.
On note P le périmètre de ce rectangle, et S son aire : on a donc $P = 2 \times (a + b)$ et $S = a \times b$.

Le rectangle de dimensions entières $(a ; b)$ est dit ***sympathique*** si **S est divisible par P**.

Exemple : Le rectangle (10 ; 15) est sympathique. En effet :
- ses dimensions sont entières.
- De plus, $P = 2 \times (10 + 15) = 50$ et $S = 10 \times 15 = 150$: l'égalité $S = 3 \times P$ justifie que S est divisible par P.

Partie A : quelques exemples de rectangles sympathiques

1. Parmi les deux rectangles ci-dessous, indiquer lequel est sympathique :



Rectangle (21 ; 28)   Rectangle (28 ; 40)

2.
   a. Existe-t-il au moins un rectangle sympathique tel que P = 20 ?
   Si oui, les déterminer tous. Sinon, expliquer pourquoi.
   b. Existe-t-il au moins un rectangle sympathique tel que P = 100 ?
   Si oui, les déterminer tous. Sinon, expliquer pourquoi.

3. Déterminer les dimensions de tous les carrés sympathiques.

4.

a. Écrire un algorithme qui renvoie la largeur de tous les rectangles sympathiques de longueur 1200.

b. Donner alors tous les rectangles sympathiques du type (a ; 1200).

Partie B : Rectangles sympathiques à largeur fixée

1. Dans cette question, on souhaite déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type (5 ; b), où b est un entier naturel supérieur ou égal à 5.

a. Justifier que, pour tout rectangle du type (5 ; b), on a : $3 \times P > S$.

b. En déduire que le seul rectangle sympathique de largeur 5 est de longueur 20.

2.

a. Déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type (4 ; b).

b. Déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type (3 ; b).

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rectangle sympathique du type (2 ; b).

3.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel impair $a \geq 3$, le rectangle (a ; $a(a$-1)) est sympathique.

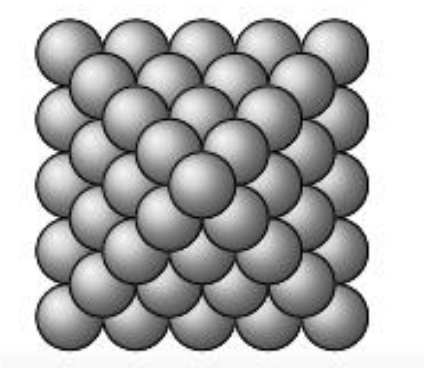
b. Démontrer que, pour tout entier naturel $a \geq 3$, on peut trouver un rectangle sympathique de largeur a.

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

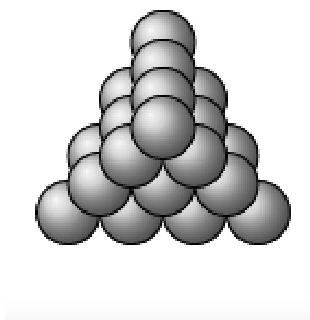
Empilements d'oranges

Un primeur organise son étal d'oranges (qu'on modélise par des boules de même diamètre) en les installant soit sous forme d'une ***pyramide à base carrée***, soit sous forme ***d'une pyramide dont la base est un triangle équilatéral*** comme illustré ci-dessous.

On appellera alors ***hauteur de la pyramide*** le nombre de niveaux formés pour construire cette dernière.

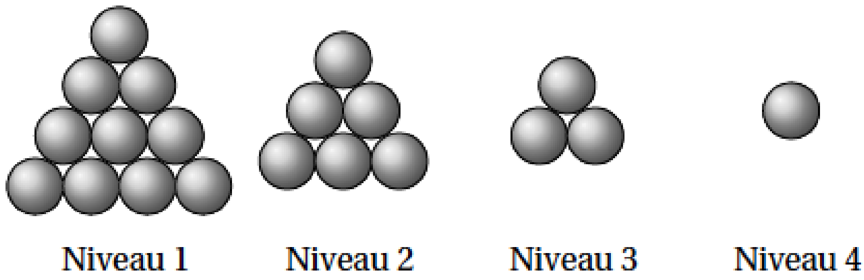


Pyramide à base carrée
(vue du dessus)



Pyramide à base triangulaire
(vue du dessus)

Par exemple, une pyramide à base triangulaire à 4 niveaux est constituée d'une superposition de quatre couches d'oranges (comme illustré ci-après), et le primeur utilise 20 oranges pour réaliser cet empilement. Il s'agit donc d'une pyramide de hauteur 4.



1. Pour une **pyramide à base triangulaire**, le primeur a commencé à déterminer le nombre d'oranges empilées en fonction du nombre de niveaux, et a récapitulé ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

Hauteur de la pyramide	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'oranges	1	4	10	20	35	56	84	120	165

   a. Combien doit-il empiler d'oranges pour réaliser une pyramide à base triangulaire à 15 niveaux ?

   b. Le primeur dispose de 2017 oranges et souhaite les empiler en un tas le plus haut possible sous forme d'une pyramide à base triangulaire.
   Le pourra-t-il sans qu'il reste d'oranges ?
   Quelle sera la hauteur de la pyramide la plus haute qu'il puisse construire ?

2. Pour un entier naturel n non nul, on admet que le nombre $c(n)$ d'oranges utilisées pour former une **pyramide à base carrée** en fonction du nombre n de niveaux est donné par la formule ci-dessous :

$$c(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   a. Combien doit-il empiler d'oranges pour réaliser une pyramide à base carrée à 12 niveaux ?

   b. Le primeur dispose de 2017 oranges et souhaite les empiler en un tas le plus haut possible sous forme d'une pyramide à base carrée.
   Le pourra-t-il sans qu'il reste d'oranges ?
   Quelle sera la hauteur de la pyramide la plus haute qu'il puisse construire ?

3. Peut-il empiler 2017 oranges en **deux tas de même hauteur**, l'un pyramidal à base carrée et l'autre pyramidal à base triangulaire ? Si non, combien d'oranges reste-t-il au minimum ?

4. Peut-il empiler 2017 oranges en **deux tas**, l'un pyramidal à base carrée et l'autre pyramidal à base triangulaire ? Si non, combien d'oranges reste-t-il au minimum ?

5. Étudier le cas où le primeur essaie d'empiler ces 2017 oranges en deux tas à base carrée et un tas à base triangulaire.