

Rédaction possible pour « Ensembles arithmétiques »

1. a. S_1 est un EA, car chaque fois qu'on considère deux éléments, le troisième complète l'ensemble S_1 et 1 est la moyenne arithmétique de 0 et 2. Pour S_2 , 0 et 3 n'ont pas de complément ad hoc, pour S_3 ce sont 1 et 4. Les triplets $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2})$, $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$ sont constitués de deux éléments de S_4 et de leur moyenne arithmétique. Chaque élément de S_4 y figure accompagné des quatre autres.

b. Si un ensemble a deux éléments a et b , il faudrait pour qu'il soit arithmétique que $\frac{a+a}{2} = b$ ou $\frac{a+b}{2} = a$ deux égalités qui conduisent à $a = b$, mais l'ensemble a deux éléments. Les singletons sont, quant à eux, des EA, puisque pour chaque couple d'éléments de S est de la forme (a, a) et que $c = a$ convient.

c. L'ensemble $\{0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2\}$ convient. En effet, les triplets $(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $(0, 1, 2)$, $(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2)$ font tous apparaître deux nombre et leur moyenne, et chacun y figure accompagné des quatre autres.

2. a. Si a est la moyenne de b et c , alors $a = \frac{b+c}{2}$ et donc $c = 2a - b$. Par symétrie, on doit aussi essayer $d = 2b - a$.

b. Conformément à la question précédente, on doit à chaque étape se demander si $(S[i]+S[j])/2$ ou $2*S[i]-S[j]$, ou $2*S[j]-S[i]$ appartient à S . Dès qu'on a prouvé qu'aucun des trois n'appartient à S , on peut conclure. Cela fait au maximum $3n^2$ opérations (la fonction Appartient (r,S) dissimule les comparaisons du résultat de chaque calcul à la liste des éléments de S). Ci-contre, les ajouts à réaliser (sur fond grisé).

c. Avec ce programme, on essaie le couple (j,i) et le couple (i,j) . On essaie aussi les couples (i,i) . De plus, on ne s'échappe des boucles qu'après avoir tout testé, quand le premier Faux fait tout échouer. D'où les aménagements ci-après.

3. On peut commencer par vérifier que les $\frac{2(a-m)}{M-m}$ sont compris entre 0 et 2. Cela provient du fait que $0 \leq a - m \leq M - m$. On peut ensuite vérifier que 0, 1 et 2 sont éléments de S' . Il suffit pour cela de donner à a les valeurs $m, \frac{M+m}{2}$ et $M, \frac{M+m}{2}$.

est en effet un élément de S , car m et M ne peuvent être ni l'un ni l'autre la moyenne de deux éléments de S . Pour vérifier la propriété donnée dans la définition, on prend deux éléments de S' (ce qui revient à prendre les deux éléments de S dont ils sont

les images), $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et $\frac{2(b-m)}{M-m}$, leur moyenne arithmétique $\frac{2(\frac{a+b}{2}-m)}{M-m}$, le symétrique de $\frac{2(b-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et le symétrique de $\frac{2(a-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(b-m)}{M-m}$, qui sont $\frac{2(2a-b-m)}{M-m}$ et $\frac{2(2b-a-m)}{M-m}$. Comme S est un EA, un des trois nombres $\frac{a+b}{2}$, $2a - b$ et $2b - a$ appartient à S , donc une de leurs trois images à S' .

4. Si x est élément de S tel que $0 < x < 1$, alors $x - (2 - x) = 2x - 2$ n'appartient pas à S . $2 + (2 - x) = 4 - x$ n'appartient pas à S . La seule possibilité pour compléter la paire $\{x, 2\}$ est donc $\frac{x+2}{2}$.

Si $1 < x < 2$, alors $0 - x$ n'appartient pas à S et $2x$ non plus. La seule possibilité pour compléter la paire $\{0, x\}$ est $\frac{x}{2}$.

Remarquons que si S contient 0 et 2, il contient aussi 1, seule possibilité pour compléter la paire $\{0, 2\}$. L'ensemble S a donc trois éléments au moins et on vient de voir que s'il en possède un quatrième, il en a au moins un cinquième.

Nous n'avons raisonné que sur des ensembles contenus dans $[0, 2]$, mais la question 3. nous a permis de ramener le problème à de tels ensembles. Il n'y a donc pas d'EA à 4 éléments.

5. a. On suppose qu'il existe dans S un élément a_1 tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$. La question 4. Nous a permis de montrer que $\frac{a_1+2}{2}$ appartient à S . Or, $1 < \frac{a_1+2}{2} < 2$. La question 4. conduit à $\frac{a_1+2}{4} \in S$, mais ce dernier nombre est strictement inférieur à $\frac{2}{3}$ et strictement supérieur à a_1 . Donc, si S contient un élément inférieur à $\frac{2}{3}$, il en contient un plus grand et aussi inférieur à $\frac{2}{3}$. Il en contient ainsi 3, 4, etc. une infinité, mais l'hypothèse précise que S est un ensemble à n éléments. D'onc S ne contient aucun nombre inférieur à $\frac{2}{3}$.

b. Si S contient un nombre a strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, d'après la question 4. le nombre $\frac{a+2}{2}$ appartient à S et est supérieur à 1. La question 4. Intervient encore : $\frac{a+2}{4}$ appartient à S et ce nombre est supérieur à $\frac{2}{3}$ et inférieur à 1. La comparaison entre a et $\frac{a+2}{4}$ donne : $a - \frac{a+2}{4} = \frac{3a-2}{4}$ et comme $a > \frac{2}{3}$ on conclut que $\frac{a+2}{4} < a$. Donc, si l'intervalle $]\frac{2}{3}, 1[$ contient un élément de S , il en contient un autre plus petit. On termine le raisonnement comme au a.

c. On déduit de ce qui précède que si S contient un élément de $]0, 1[$, cet élément ne peut être que $\frac{2}{3}$. L'ensemble S contient alors $\frac{4}{3}$ (moyenne entre 2 et $\frac{2}{3}$). S'il contenait un autre élément que $\frac{4}{3}$ entre 1 et 2, alors d'après la question 3., il contiendrait sa moitié,

```

fonction TesterEA(S=[S[1],...,S[n]] , n)
Resultat ← Vrai
Pour i de 1 à n
    Pour j de 1 à n
        Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
            or
                Appartient ((2*S[i]-S[j]),S)
            or
                Appartient ((2*S[j]-S[i]),S))
            Resultat← Faux
Renvoyer(Resultat)
    
```

```

fonction TesterViteEA(S=[S[1],...,S[n]] , n)
Resultat ← Vrai
Pour i de 1 à n-1
    Pour j de i+1 à n
        Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
            or
                Appartient ((2*S[i]-S[j]),S)
            or
                Appartient ((2*S[j]-S[i]),S))
            Resultat← Faux
Renvoyer (Resultat)
Renvoyer(Resultat)
    
```

comprise entre 0 et 1, qui ne peut être que $\frac{2}{3}$. On a dit que la réduction à $[0,2]$ ne diminuait pas la généralité du problème, donc 5 est un maximum pour le nombre d'éléments de S .

6. Seuls 3 et 5 sont des effectifs convenables pour un EA.