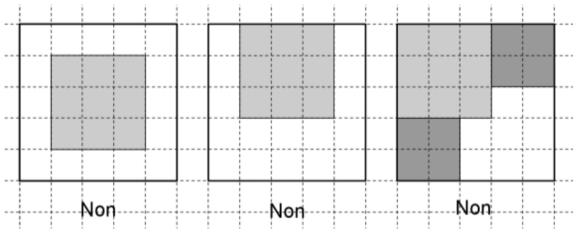
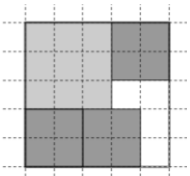
National 2 (série S) 1, 2, 3 … dallez ! Une rédaction possible

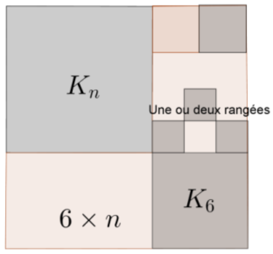
1. *a.* Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.
b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).



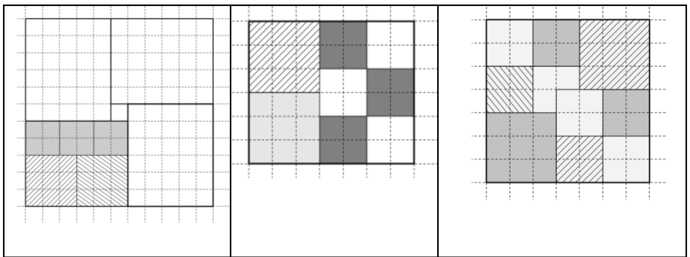


c. La figure de gauche montre un tel pavage.
2. $u(1) = 1, u(8) = 0, u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit…), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.
3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.

4. *a.* Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.

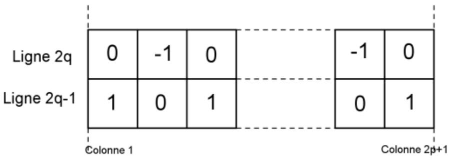


5. *a.* La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11}. Cela montre que $u(11) \leq 1$.
b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13}. Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.
c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question **4. *b.***, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.



Pavage d'un rectangle 5 × 6 et, par extension, de K_{11}	*Pavage d'un rectangle 6 × 7 (utilisable pour paver K_{13})*	*Pavage de K_7 utilisant 3 carrés de taille 1 (la question n'était pas posée)*

6. *a.* Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1). Le total est donc $2p + 1$.



b. La façon dont les coefficients des cases d'un tel carré de taille 3 peuvent se répartir peut être étudiée en observant les quatre positions possibles d'un carré de taille 3 dans un carré de taille 4. Les sommes possibles sont -3, 0 et 3.

c. La même figure sert à étudier ce qu'il advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions (il suffit cette fois de considérer les quatre positions possibles d'un carré de taille 2 dans un carré de taille 3). Cette fois la somme des coefficients est constante égale à 0.
d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.
e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.
f. $2\,017 = 1 + 4 \times 21 \times 24$. Ce qui montre que $2\,017$ est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\,017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1.