Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le parcours du robot

On attend bien sûr que chaque affirmation soit justifiée.
D'autres justifications que celles proposées dans le corrigé sont possibles.
On valorisera toute recherche, même inachevée, ou toute tentative de justification, même maladroite.

		barème
1.a	Pour construire le réseau R_4 à l'aide du réseau R_3, on ajoute deux segments $[A_3A_4]$ et $[B_3B_4]$ de longueur 1 puis on referme le carré extérieur avec deux segments de longueur 4. Le nombre de segments de longueur 1 sur le réseau R_4 est donc 28.	
1.b	Si on nomme u_n le nombre de segments du réseau R_n (où $n \geq 1$), alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 2 + 2(n+1)$ et $u_1 = 4$. Pour déterminer u_{20}, il suffit de calculer les termes de proche en proche. On détermine $u_{20} = 460$. (*on n'attend pas l'utilisation des notations sous forme de suites*)	
2.a	Le réseau R_1 comporte 4 segments de longueur 1 donc $L_1 \geq 4$. Le robot peut parcourir ce réseau en partant de B_1 et en tournant autour du carré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (par exemple). Donc $L_1 = 4$. Le réseau R_2 comporte 10 segments de longueur 1 donc $L_2 \geq 10$. Le robot peut parcourir ce réseau en partant de B_1 et en tournant autour du réseau R_1 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre jusqu'à revenir en B_1 puis en parcourant la bordure extérieure en passant par B_2, puis A_2 et enfin A_1. Donc $L_2 = 10$. (*un parcours dessiné et lisible peut suffire)*	
2.b	Le réseau R_3 comporte 18 segments de longueur 1 donc $L_3 \geq 18$. Si le robot pouvait parcourir tout le réseau avec une longueur de parcours de 18, alors le nombre de segments partant de chaque sommet serait pair, sauf peut-être pour deux d'entre eux, à savoir le premier et le dernier de la chaine. Mais ici des quatre points B_1, B_2, A_1 et A_2 partent exactement 3 segments. Il n'est donc pas possible de parcourir le réseau avec une longueur de parcours de 18. On en déduit donc que $L_3 \geq 19$. De plus, le robot peut parcourir ce réseau en effectuant successivement : - le parcours du réseau R_2 de B_1 à A_1 de longueur 10 (cf q2a) - un retour en arrière de longueur 1 de A_1 à A_2 - un parcours de la bordure extérieure restante de longueur 8 (de A_2 à B_2 en passant par A_3 puis B_3). Le parcours proposé est de longueur 19 et $L_3 \geq 19$ donc $L_3 = 19$.	
3.a	On se place dans un repère d'origine O ("en bas à gauche du réseau") et de vecteurs unités $\vec{\imath} = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OB_1}$ respectivement. Pour tout point M(x;y) du réseau R_n, on a $0 \leq x \leq n$ et $0 \leq y \leq n$. Si $y \leq x$ (i.e. M est dans la partie "en bas à droite" du réseau), on rejoint le point A_x en y étapes (translation de vecteur $-y\vec{\jmath}$) puis le point A_n en (n-x) étapes (translation de vecteur $(n-x)\vec{\imath}$). On a ainsi atteint le sommet A_n en $n - x + y$ étapes, avec $n - x + y \leq n$. Si $y > x$ (i.e. M est dans la partie "en haut à gauche" du réseau), on rejoint le point B_y en x étapes (translation de vecteur $-x\vec{\imath}$) puis le point B_n en (n-y) étapes (translation de vecteur $(n-y)\vec{\jmath}$). On a ainsi atteint le sommet B_n en $n - y + x$ étapes, avec $n - y + x \leq n$. En partant de n'importe quel point du réseau, on peut donc atteindre un des deux sommets A_n ou B_n délimitant ce réseau en n étapes au maximum.	
3.b	Soit n un entier supérieur ou égal à 1; pour parcourir le réseau R_{n+1}, il suffit donc : - de parcourir le réseau R_n (qui est le carré dont trois sommets sont O, A_n et B_n) avec un parcours de longueur L_n - de rejoindre un des deux sommets A_n ou B_n en n étapes au plus (cf **q3.a.**) - de compléter le parcours par la bordure extérieure restante (de A_n à B_n ou de B_n à A_n en passant par A_{n+1} et B_{n+1}), en $2 + 2(n+1)$ étapes. On dispose ainsi d'un parcours du réseau R_{n+1} de longueur au plus $L_n + n + 2 + 2(n+1)$. Mais on n'a pas la certitude que ce trajet soit de longueur minimale. Donc pour tout entier naturel n non nul, $L_{n+1} \leq L_n + 3n + 4$	

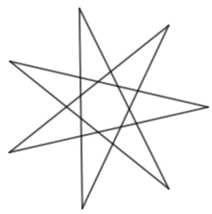
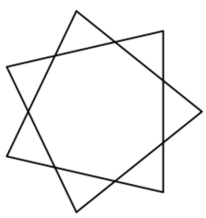
4.a	Le réseau R_{20} comporte 460 segments de longueur 1 (cf **q1.b.**). Donc le parcours du robot a une longueur au moins égale à 460, ce qui se note $L_{20} \geq 460$.	
4.b	On emploie ensuite toutes les inégalités $L_{n+1} \leq L_n + 3n + 4$ pour n allant de 1 à 19. En sommant termes à termes, on en déduit que : $L_2 + L_3 + \ldots + L_{19} + L_{20} \leq (L_1 + 3\times1 + 4) + (L_2 + 3\times2 + 4) + \ldots + (L_{19} + 3\times19 + 4)$ ce qui équivaut à $L_{20} \leq L_1 + 3\times(1+2+\ldots+19) + 4\times19$ ce qui équivaut à $L_{20} \leq L_1 + 3\times(1+2+\ldots+19) + 4\times19$ Le calcul du second membre donne 650. Le robot peut donc passer sur tous les segments du réseau R_{20} avec un parcours de longueur inférieure ou égale à 650.	

Exercice académique numéro 2

(à traiter par les candidats de la série S)

Polygones étoilés réguliers

On attend bien sûr que chaque affirmation soit justifiée.
D'autres justifications que celles proposées dans le corrigé sont possibles.
On valorisera toute recherche, même inachevée, ou toute tentative de justification, même maladroite.

		barème
1.	Pour n = 6 et α = 60°, on obtient un hexagone régulier convexe de côté 5. Voir fig 1	
2.	L'étoile à 5 branches est obtenue pour n = 5. On a : $a=\frac{360}{5}=72°$, $b=\frac{a}{2}=36°$ et α = 180 – 36 = 144°.	
3.a	(voir fig 2) Pour un polygone régulier à n côtés, l'angle au centre défini par deux sommets consécutifs est $a=\frac{360}{n}$ et l'angle du polygone étoilé est $b=\frac{a}{2}$. Si on relie les sommets du polygone convexe de k en k pour former un polygone étoilé, l'angle au centre a relie deux sommets distants de n – 2k rangs. On a donc : $a=\frac{(n-2k)360}{n}$, $b=\frac{(n-2k)360}{2n}$ et $\alpha=180-b=180-\frac{(n-2k)360}{2n}=\frac{k}{n}360$ $\boxed{\alpha=\frac{k}{n}360}$ Si on prend un angle $\alpha=\frac{l}{m}360$ avec $l<m$, on peut retrouver les polygones étoilés d'ordre m (ou un diviseur de m) si $m<n$. En revanche si $m>n$, l'algorithme ne « ferme » pas le polygone. Avec n = 7 : Pour k = 3, $\alpha=\frac{3}{7}360$:  points reliés de 3 en 3	
3.b	Pour k = 2, $\alpha=\frac{2}{7}360$:  points reliés de 2 en 2	

4.	**voir figure 3** Pour n appartenant à {3 ; 4 ; 6}, l'algorithme ne dessine que des polygones convexes. Pour tout $n \geq 5$ et k tel que $2 \leq k < \dfrac{n}{2}$, on obtient un polygone étoilé lorsque les entiers k et n sont premiers entre eux ou si $\dfrac{k'}{n'}$, la fraction réduite de $\dfrac{k}{n}$ est telle que $1 < k' < n'-1$. Si $k \geq \dfrac{n}{2}$, on n'obtient pas de nouveaux polygones étoilés.	
5.	Pour avoir un polygone à 2018 côtés, il faut que $\alpha = \dfrac{k}{2018}360$ et que k ne divise pas 2018. Or $\dfrac{2018}{2} = 1009$ qui est un nombre premier. Tous les entiers de 2 à 1008 sont donc premiers avec 1009. Il y a donc autant de polygones étoilés (à 2018 ou 1009 côtés) que d'entiers k strictement compris entre 2 et 1009 ; c'est-à-dire 1006. Et parmi ces polygones, la moitié ont 2018 côtés : on en compte donc 503.	
6.	Pour n = 206 = 2x103, il y a 100 valeurs de k telles que 2 < k < 103. Toutes ces valeurs sont premières avec le nombre premier 103. On a donc 100 polygones étoilés à 103 ou 206 côtés. Parmi les 100 valeurs de k, on compte 50 nombres pairs qui donnent autant de polygones étoilés à 206 côtés.	

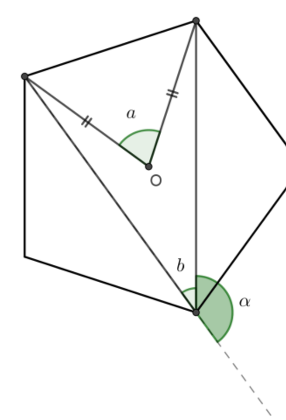
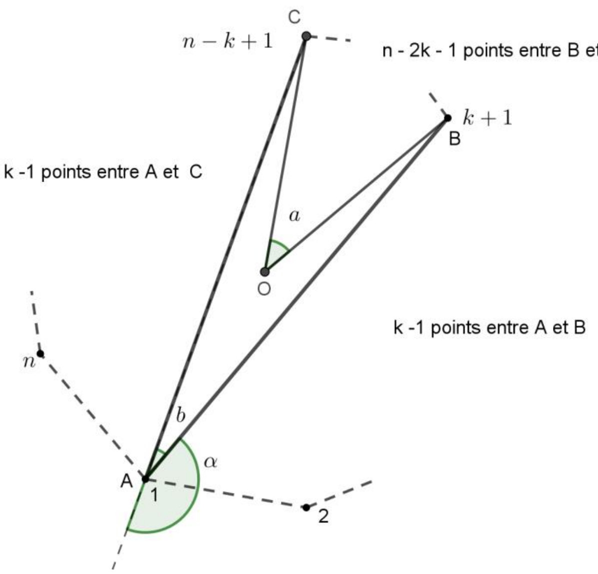
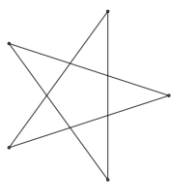
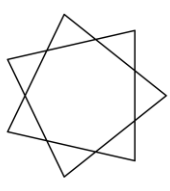
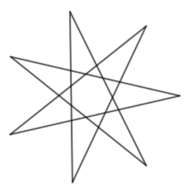
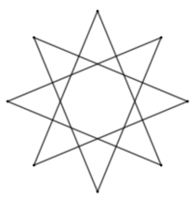
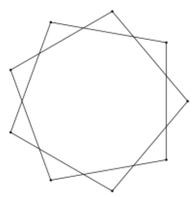
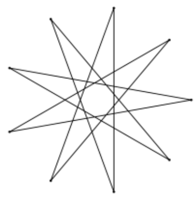
Figure 1 :	Figure 2 :
	

Figure 3 :

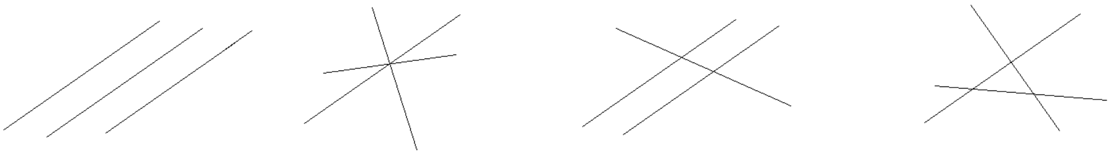
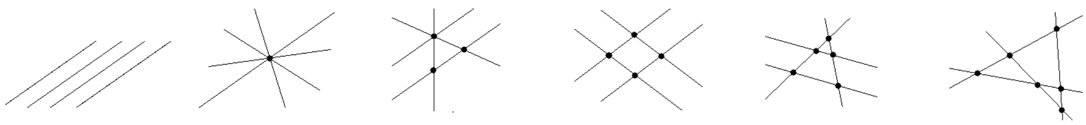
n	5	7		8	9	
k	2	2	3	3	2	4
						

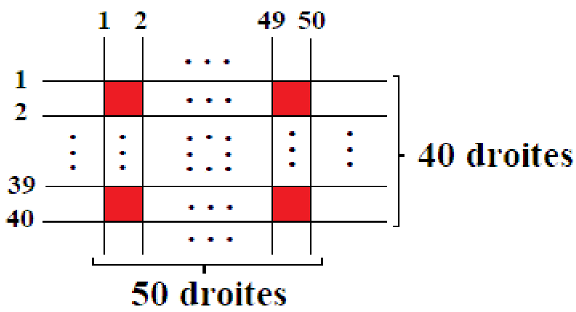
Exercice académique numéro 3

(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Intersections de droites

On attend bien sûr que chaque affirmation soit justifiée.
D'autres justifications que celles proposées dans le corrigé sont possibles.
On valorisera toute recherche, même inachevée, ou toute tentative de justification, même maladroite.

		barème
1.	Chacune des trois droites intersecte au plus les deux autres droites. Les points d'intersection sont alors comptés deux fois. Le nombre de points d'intersection est donc inférieur ou égal à $3\times 2/2=3$. Ensuite chaque entier 0, 1, 2 et 3 est atteignable.  0 point d'intersection 1 point d'intersection 2 points d'intersection 3 points d'intersection On en déduit que I_3 = {0;1;2;3}.	
2.a	2 n'appartient pas I_4. Démonstration avec un raisonnement par l'absurde : Si une configuration à 4 droites et 2 points d'intersections existe, alors en enlevant une droite, on retombe sur une configuration à 3 droites et 0, 1 ou 2 point(s) d'intersection. Avec 0 point d'intersection, les trois droites sont parallèles. L'ajout d'une droite amène 0 ou 3 points de plus, selon que cette droite est parallèle ou sécante avec les trois premières. Impossible. Avec 1 point d'intersection, les trois droites sont concourantes. L'ajout d'une droite amène 0, 2 ou 3 points de plus, selon que la droite passe ou non par le point d'intersection et qu'elle est parallèle ou non à l'une des trois droites. Impossible. Avec 2 points d'intersection, deux des trois droites d1 et d2 sont parallèles et la troisième d3 est une sécante. L'ajout d'une droite d4 amène au moins 1 point de plus, que d4 soit parallèle à d1, à d2 ou non parallèle à l'une des droites précédentes. !impossible.	
2.b	**.** On s'intéresse à I_4. Chacune des quatre droites intersecte au plus les trois autres droites. Les points d'intersection sont alors comptés deux fois. Le nombre de points d'intersection est donc inférieur ou égal à $4\times 3/2=6$. On essaie d'atteindre ensuite chaque entier compris au sens large entre 0 et 6, sachant que 2 n'est pas possible.  0 point d'intersection 1 point d'intersection 3 points d'intersection 4 points d'intersection 5 points d'intersection 6 points d'intersection On conclut que I4 = {0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.	
3.	Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et deux entiers naturels non nuls *a* et *b* tels que $a+b=n$. Il suffit de disposer $a\geq 1$ droites parallèles selon une première direction et $b\geq 1$ droites parallèles selon une seconde direction. Le nombre de points d'intersection est alors *ab*, puisque chacune des droites du groupe de *a* coupe une unique fois chacune des droites du groupe de *b* et que le parallélisme empêche le concours d'au moins trois droites en un même point.	
4.a	On construit les droites de proche en proche de la façon suivante : on pose une première droite on pose une seconde droite sécante avec la 1ère … quand *k* droites sont déjà construites, on localise tous les points d'intersections déjà obtenus dans un disque et on trace une droite qui n'est parallèle à aucune des *k* premières droites et qui n'a pas d'intersection avec le disque. On est ainsi certain de créer *k* nouveaux points d'intersection. Avec cette méthode appliquée à *n* droites, on obtient un nombre de points	

	d'intersection égal à la somme 1 + 2+ … + (n-1). Ce qui fournit $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection. Et il n'est pas possible d'en avoir davantage puisqu'au plus chacune des droites coupe une fois toutes les autres. Ce qui implique que le double du nombre de points d'intersection est inférieur ou égal à $n(n-1)$. Le plus grand nombre appartenant à I_n est donc $\frac{n(n-1)}{2}$.	
4.b	La résolution dans N de l'inéquation $\frac{n(n-1)}{2} \geq 2018$ impose n > 64. Donc pour tout entier naturel $n \leq 64$, $2018 \notin I_n$ car le plus grand élément de I_n est inférieur à 2018.	
4.c	On pense tout d'abord à une configuration à 90 droites, avec 40 droites parallèles selon une direction et 50 droites parallèles selon une seconde direction. Ce qui nous donne 2000 points d'intersection. On ajoute comme condition que la distance entre deux droites consécutives (horizontalement ou verticalement) soit constante. La grille obtenue est ainsi composée de carrés.  On numérote les lignes et les colonnes. La droite diagonale passant par (L1;C1) et (L40;C40) intersecte ainsi chacune des 10 dernières colonnes, ce qui ajouterait exactement 10 nouveaux points d'intersection. Il suffit donc de décaler cette diagonale en la faisant passer par (L5;C1) et (L40;C36). Elle intersectera alors en plus chacune des lignes numérotées de 1 à 4 et des colonnes numérotées de 37 à 50 en ajoutant exactement 18 nouveaux points d'intersection aux 2000 déjà obtenus. On conclut donc que $2018 \in I_{91}$.	