Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Montpellier

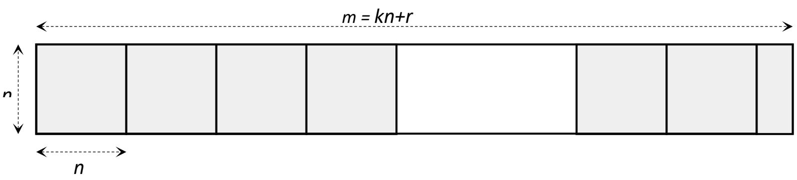
Mercredi 15 mars 2017 de 10h10 à 12h10

Exercices Académiques Eléments de correction

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Les cartes bicolores

(*l'orientation de la surface permet de distinguer deux recouvrements qui seraient semblables à une symétrie près)*

question	Elément de correction	barème
1.a.	Deux dispositions correctes	
1.a. (suite)	Il y a 16 possibilités (on peut procéder avec un arbre).	
1.b.	Il y a 4^n. On peut par exemple remarquer que, la diagonale une fois remplie, la position des cartes est déterminée pour toutes les autres cases ; il y a *n* cases dans la diagonale et 4 possibilités par case d'où le résultat. Ou bien compléter la ligne supérieure et la première colonne ($4 \times 2^{n-1} \times 2^{n-1}$ possibilités, les autres cases étant contraintes) On pourrait aussi faire une récurrence à partir de n =1	
2.a.	Quadrillage complété correctement	
2.b	On peut raisonner comme ci-dessus en complétant la première ligne et la première colonne. On a : $4 \times 2^{n-1} \times 2^{m-1} = \quad 2^{n+m}$ possibilités; la première ligne et la première colonne étant complétées, les autres cases sont contraintes On peut aussi utiliser les quadrillages carrés extraits. On a : $m = kn+r$ (division euclidienne) donc k quadrillages carrés extraits (nxn), plus un rectangle extrait nxr . Dans le « premier » carré on a 4^n possibilités d'après le 1. mais dans les (k-1) suivants, il n'y a que 2^n possibilités, puisque contraintes par la rangée précédentes. Donc il y a $4^n \times (2^n)^{(k-1)}$ possibilités sur ces carrés nxn . Sur le quadrillage nxr on a 2^r possibilités quant au quadrillage résiduel (rx($n-r$)) toutes les cases sont contraintes. Finalement : $4^n \times (2^n)^{(k-1)} \times 2^r = \quad 2^{n+m}$ 	

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)
Les rectangles sympathiques

Dans tout le corrigé, on prend pour notation :
(a ; b) est un rectangle de largeur a et longueur (avec donc $0 < a \leq b$)

question	Elément de correction	barème
A-1	Pour le rectangle (21 ; 28) : P = 98 et S = 588. S = 6 × P donc le rectangle (21 ; 28) est sympathique. Pour le rectangle (28 ; 40) : P = 136 et S = 588. P ne divise pas S donc le rectangle (28 ; 40) n'est pas sympathique.	
A-2.a	On peut tester tous les cas : P = 20 donc $a + b = 10$ Si $a = 1$ et $b = 9$, S = 9 Si $a = 2$ et $b = 8$, S = 16 Si $a = 3$ et $b = 7$, S = 21 Si $a = 4$ et $b = 6$, S = 36 Si $a = 5$ et $b = 5$, S = 25 Donc dans tous les cas, le rectangle n'est pas sympathique. Autre raisonnement : Si un rectangle (a ; b) de périmètre P = 20 est sympathique, alors $a + b = 10$ et S, c'est-à-dire ab, est divisible par 10, donc par 2 et par 5. Nécessairement, a ou b est divisible par 5 et $0 < a \leq b \leq 9$. Ceci implique que $b = a = 5$. Mais alors S est égal à 25 qui n'est pas divisible par 20. Conclusion : il n'existe aucun rectangle sympathique tel que P = 20.	
A-2.b	Condition nécessaire : Si un rectangle (a ; b) de périmètre P = 100 est sympathique, alors $a + b = 50$ et S, c'est-à-dire ab, est divisible par 10, donc par 2 et par 5. Nécessairement, a ou b est divisible par 5 et $0 < a \leq b \leq 49$. Or si a ou b est divisible par 5 (resp. par 2), alors l'autre l'est aussi puisque leur somme est divisible par 5 (resp. par 2). Nécessairement la largeur a, divisible par 2 et 5, est égal à 10 ou à 20. Condition suffisante : Si $a = 10$, alors $b = 40$, P = 100 et S = 400 : S = 4 × P donc le rectangle (10 ; 40) est sympathique. Si $a = 20$, alors $b = 30$, P = 100 et S = 600 : S = 6 × P donc le rectangle (20 ; 30) est sympathique. Conclusion : Il existe deux rectangles sympathiques tels que P = 100, à savoir (10 ; 40) et (20; 30).	
A-3.	Condition nécessaire : Si le carré (a ; a) est sympathique, alors $4a$ divise a^2. Nécessairement 4 divise a. Condition suffisante : Si a est un multiple non nul de 4, alors il existe un entier naturel non nul n tel que $a = 4n$. Pour le carré (a ; a), P = $16n$ et S = $16n^2$: S = n × P donc le carré (a ; a) est sympathique. Conclusion : Les carrés sympathiques sont les carrés dont la longueur du côté est un multiple non nul de 4.	
A-4.	Algorithme correct	
A-5	On trouve 10 possibilités pour a : 50 ; 240 ; 300 ; 400 ; 600 ; 675 ; 720 ; 800 ; 1050 ; 1200	

B-1.a	$P = 2(5+b)$ et $S = 5b$. On peut par exemple calculer $3P - S = \ldots = 30 + b > 0$.	
B-1.b	Si le rectangle (5 ; b) est sympathique, on a alors P divise S (il existe donc k tel que $S = kP$) Et $3P > S$. Les seules possibilités sont donc $S = P$ ou $S = 2P$. $S = P$ équivaut à $2(5+b) = 5b$: pas de solution entière $S = 2P$ équivaut à $4(5+b) = 5b$, ce qui donne $b = 20$	
B-2.a	On a alors $P = 2(4+b)$ et $S = 4b$. Si le rectangle est sympathique, il existe un entier naturel k tel que $S = kP$. Cela donnerait $4b = 8k + 2kb$, soit $(4 - 2k)b = 8k$. Impossible si $k \geq 2$, et pour $k = 1$ on a $b = 4$. La seule possibilité est le carré (4 ; 4)	
B-2.b	On a alors $P = 2(3+b)$ et $S = 3b$. Si le rectangle est sympathique, il existe un entier naturel k tel que $S = kP$. Cela donnerait $3b = 6k + 2kb$, soit $(3 - 2k)b = 6k$. Impossible si $k \geq 2$, et pour $k = 1$ on a $b = 6$. La seule possibilité est donc (3 ; 6)	
B-2.c	On a alors $P = 2(2+b)$ et $S = 2b$. Si le rectangle est sympathique, il existe un entier naturel k tel que $S = kP$. Cela donnerait $2b = 4k + 2kb$, soit $(2 - 2k)b = 4k$. Impossible si $k \geq 2$, et pour $k = 1$ pas de solution. Il n'y a donc pas de rectangle sympathique avec $a = 2$.	
B-3.a	$P = 2a^2$, et $S = a^2(a-1)$ • Le produit $a(a-1)$ est supérieur à a. a est impair donc il existe un entier naturel n tel que $a = 2n + 1$. De plus, $a \geq 3$ implique $n \geq 1$. On réécrit donc S : $S = a^2 \times 2n = n \times P$. Le rectangle ($a$; $a(a-1)$) est bien sympathique.	
B-3.b	Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 3, - Si a est impair, alors le rectangle (a ; $a(a-1)$) est sympathique. (cf question **3.a.**) - Si a est pair et qu'il possède un diviseur impair n supérieur ou égal à 3, alors il existe un entier naturel non nul k tel que $a = n \times k$. Le rectangle (n, $n(n-1)$) est sympathique de périmètre p et d'aire s (cf question **3.a.**) : en multipliant les deux dimensions par k, on obtient alors encore un rectangle (nk , $nk(n-1)$) sympathique. En effet $P = 2(nk + nk(n-1)) = k \times p$ et $S = nk \times nk(n-1) = k^2 \times s$. Sachant que p divise s, on en déduit que kp divise k^2s, c'est-à-dire que P divise S. Ce rectangle qui est sympathique a pour largeur nk, soit a. - Si a est pair et qu'il ne possède aucun diviseur impair supérieur ou égal à 3, alors a est une puissance de 2. Il existe donc un entier m tel que $a = 2^m$. Comme a est supérieur ou égal à 3, on en déduit que $m \geq 2$. a est donc un multiple de 4 : le carré (a ; a) est donc sympathique (cf **partie A 3**.). Conclusion : pour tout entier naturel $a \geq 3$, on peut trouver un rectangle sympathique de largeur a.	

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Empilements d'oranges

Dans cet exercice, on sera attentif aux explications données. Les démarches peuvent être pour l'essentiel exploratoires, mais explicitées. Il s'agit en particulier d'expliquer pourquoi les solutions données sont bien optimales.

question	Elément de correction	barème
1.a	On trouve 680 oranges	
1.b	Pour 21 étages il faut 1771 oranges, et pour 22 il en faut 2024. Il peut donc faire une pyramide de 21 étages, et il restera 246 oranges.	
2.a	On trouve 650 oranges	
2.b	c(17) = 1785 et c(18) = 2109. Il pourra donc faire une pyramide de 17 étages, et il en restera 232	
3.	En faisant deux pyramides de 15 étages, il utilisera 1920 oranges (et 2312 pour deux pyramides de 16 étages). Il lui restera donc au minimum (pour 15 étages) 97 oranges.	
4.	On trouve que la solution la plus proche de 2017 est pour : - Une pyramide à base triangulaire de hauteur 11 - Une pyramide à base carrée de hauteur 18 Cela fait 220 + 1785 = 2005 oranges : il en restera 12 oranges	
5.	On peut ne laisser qu'1 orange, en construisant : - 1 pyramide à base carrée de coté 6 - 1 pyramide à base carrée de coté 10 - 1 pyramide à base triangulaire de coté 20 Cela fait en effet 91 + 385 + 1540 = 2016	