Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Algorithme linéaire

On attend bien sûr que chaque affirmation soit justifiée.
D’autres justifications que celles proposées dans le corrigé sont possibles.
On valorisera toute recherche, même inachevée, ou toute tentative de justification, même maladroite.

Partie A :		**barème**

1.a — **1 point**

Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables X_1 et X_2 à chaque étape de l’algorithme :

	X_1	X_2
Algorithme 1	3	1
$X_1 \longleftarrow 2\times X_1$	6	1
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$	7	1
$X_1 \longleftarrow 5\times X_1$	35	1
$X_2 \longleftarrow -1\times X_2$	35	-1
$X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$	35	34

On a donc bien $x_1'=35$ et $x_2'=34$.

1.b — **2 points**

Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables X_1 et X_2 à chaque étape de l’algorithme :

	X_1	X_2
Algorithme 1	x_1	x_2
$X_1 \longleftarrow 2\times X_1$	$2x_1$	x_2
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$	$2x_1+x_2$	x_2
$X_1 \longleftarrow 5\times X_1$	$10x_1+5x_2$	x_2
$X_2 \longleftarrow -1\times X_2$	$10x_1+5x_2$	$-x_2$
$X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$	$10x_1+5x_2$	$10x_1+4x_2$

On obtient $\begin{cases} x_1'=10x_1+5x_2 \\ x_2'=10x_1+4x_2 \end{cases}$

1.c — **3 points**

Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} 10x_1+5x_2=20 \\ 10x_1+4x_2=18 \end{cases}$. Pour cela, on peut soustraire membre à membre ce qui donne $x_2=2$. En remplaçant x_2 par 2 dans une des deux équations, on obtient $x_1=1$. Il reste à vérifier que le couple $(x_1 ; x_2)=(1 ; 2)$ vérifie bien le système ce qui se fait aisément en remplaçant.

1.d — **1 point**

Oui, x_1' et x_2' s’obtiennent linéairement en fonction de x_1 et $x_2$par l’algorithme 1 puisque d’après la question 1c, on a $\begin{cases} x_1'=ax_1+bx_2 \\ x_2'=cx_1+dx_2 \end{cases}$ avec $a=10 ; b=5 ; c=10$ et $d=4$.

2.a — **2 points**

L’algorithme est bien linéaire puisque chacune de ces instructions est de la forme $X_1 \longleftarrow X_1+X_2$; $X_2 \longleftarrow X_1+X_2$; $X_1 \longleftarrow a\times X_1$ ou $X_2 \longleftarrow a\times X_2$ avec a un nombre réel.
Voici un tableau récapitulant l’état des deux variables X_1 et X_2 à chaque étape de l’algorithme :

	X_1	X_2

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td><u>Algorithme 2</u></td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$x_1+x_2$</td><td>$x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$x_1+x_2$</td><td>$x_1+2x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow -1\times X_1$</td><td>$-x_1-x_2$</td><td>$x_1+2x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$x_2$</td><td>$x_1+2x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow -2\times X_1$</td><td>$-2x_2$</td><td>$x_1+2x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$-2x_2$</td><td>$x_1$</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow -0{,}5\times X_1$</td><td>$x_2$</td><td>$x_1$</td></tr>
</table>
Cet algorithme échange les valeurs des variables puisqu'on obtient $x_1^{'}=x_2$ et $x_2^{'}=x_1$.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2.b</td>
<td>Oui, $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ s'obtiennent linéairement en fonction de x_1 et $x_2$par l'algorithme 2 puisque l'on a $\begin{cases} x_1^{'}=a\,x_1+b\,x_2 \\ x_2^{'}=c\,x_1+d\,x_2 \end{cases}$ avec $a=0\,;b=1;c=1$ et $d=0$.</td>
<td>1 point</td>
</tr>
<tr>
<td>2.c</td>
<td>On peut par exemple faire précéder les deux instructions $X_1 \longleftarrow c\times X_1$ et $X_2 \longleftarrow b\times X_2$ des neuf instructions de l'algorithme 2 puisque après ces deux instructions on aura $X_1=c\,x_1$ et $X_2=b\,x_2$, valeurs que l'on sait permuter à l'aide de l'algorithme 2.

Nous obtenons le même résultat en faisant suivre l'algorithme 2 des instructions $X_1 \longleftarrow b\times X_1$ et $X_2 \longleftarrow c\times X_2$.</td>
<td>2 points</td>
</tr>
<tr>
<td>3.a</td>
<td>Voici un tableau récapitulant l'état des deux variables X_1 et X_2 à chaque étape de l'algorithme :
<table>
<tr><td></td><td>X_1</td><td>X_2</td></tr>
<tr><td><u>Algorithme 3</u></td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow a\times X_1$</td><td>$a\,x_1$</td><td>$x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow b\times X_2$</td><td>$a\,x_1$</td><td>$b\,x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$a\,x_1+b\,x_2$</td><td>$b\,x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow \alpha\times X_2$</td><td>$a\,x_1+b\,x_2$</td><td>$b\alpha\,x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow X_1+X_2$</td><td>$a\,x_1+b\,x_2$</td><td>$a\,x_1+b(1+\alpha)x_2$</td></tr>
<tr><td>$X_2 \longleftarrow \beta\times X_2$</td><td>$a\,x_1+b\,x_2$</td><td>$a\beta\,x_1+b\beta(1+\alpha)x_2$</td></tr>
</table>
On a bien $x_1^{'}=a\,x_1+b\,x_2$ comme attendu mais pour avoir $x_2^{'}=c\,x_1+d\,x_2$, on doit avoir $a\beta=c$ et $b\beta(1+\alpha)=d$ donc $\beta=\dfrac{c}{a}$ et
$1+\alpha=\dfrac{d}{b\beta}=\dfrac{d}{b}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{d}{b}\times\dfrac{a}{c}$ d'où $\alpha=\dfrac{ad}{bc}-1$.</td>
<td>4 points</td>
</tr>
<tr>
<td>3.b</td>
<td>Il s'agit maintenant de traiter tous les cas restants :
Si $a=0$ et $d\neq 0$ alors l'algorithme suivant fournit la réponse.
<table>
<tr><td>$X_1 \longleftarrow c\times X_1$
$X_2 \longleftarrow d\times X_2$
$X_2 \longleftarrow X_1+X_2$
$X_2 \longleftarrow -1\times X_2$
$X_2 \longleftarrow X_1+X_2$
$X_1 \longleftarrow \dfrac{b}{d}\times X_1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>6 points (1pt pour chaque sous-cas un peu générique et 1pt si l'élève partitionne</td>
</tr>
</table>

	- Si $a=0$ et $d=0$ alors l'algorithme de la question 2c fournit la réponse. - Si $a\neq 0, b=0$ et $c\neq 0$ alors l'algorithme 3 fournit la réponse. - Si $a\neq 0, b=0$ et $c=0$ alors l'algorithme composé des deux instructions $X_1 \longleftarrow a\times X_1$ et $X_2 \longleftarrow d\times X_2$ fournit la réponse. - Si $a\neq 0, b\neq 0$ et $c=0$ alors l'algorithme suivant fournit la réponse : $X_1 \longleftarrow a\times X_1$ $X_2 \longleftarrow b\times X_2$ $X_2 \longleftarrow X_1+X_2$ $X_2 \longleftarrow \frac{d}{b}\times X_2$ Ainsi (puisqu'on a bien traité tous les cas), quelles que soient les valeurs des réels a, b, c et d, on peut trouver un algorithme linéaire tel que les valeurs de fin de l'algorithme de X_1 et X_2 soient $\begin{cases} x_1'=a x_1+b x_2 \\ x_2'=c x_1+d x_2 \end{cases}$.	correctement tous les cas)
Partie B :		
1.	Déjà dans chacune de ces trois instructions, seule la variable X_1 est modifiée. Ensuite X_1 reçoit successivement les valeurs de 0, de X_2 puis de la somme des valeurs de X_2 et X_3, qui correspond bien à la seule instruction $X_1 \longleftarrow X_2+X_3$.	**2 point**
2.	L'instruction $X_i \longleftarrow a\times X_j$ correspond à la succession des trois instructions suivantes : $X_i \longleftarrow 0\times X_i$ $X_i \longleftarrow X_i+X_j$ $X_i \longleftarrow a\times X_i$ En effet, il est clair que dans ces trois instructions, seule la variable X_i est modifiée. Elle prend successivement les valeurs de 0, de X_j puis de $a\times X_j$, qui correspond bien à la seule instruction $X_i \longleftarrow a\times X_j$.	**4 points**
3.	L'instruction $X_i \longleftarrow X_j - X_k$ correspond à la succession des quatre instructions suivantes : $X_i \longleftarrow 0\times X_i$ $X_i \longleftarrow X_i+X_k$ $X_i \longleftarrow -1\times X_i$ $X_i \longleftarrow X_i+X_j$ En effet, il est clair que dans ces quatre instructions, seule la variable X_i est modifiée. Elle prend successivement les valeurs de 0, de X_k, de $-X_k$ puis de $-X_k+X_j$, qui correspond bien à la seule instruction $X_i \longleftarrow X_j - X_k$.	**4 points**

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Suite des entiers dont la somme est divisible par d

Partie A :		**barème**
1.	Les 8 premiers termes de la suite u sont 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 et 24.	**2 points**
2.	On note $\overline{abc}$ le nombre entier composé de a centaines, b dizaines et c unités : on a alors $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Si $\overline{abc}$ est divisible par 3, alors il existe un nombre entier k tel que $100a + 10b + c = 3k$. $a + b + c = 100a + 10b + c - 99a - 9b = 3(k - 33a - 3b)$. Comme $k - 33a - 3b$ est entier, $a + b + c$ est divisible par 3. Réciproquement, si $a + b + c$ est divisible par 3, alors il existe un nombre entier k' tel que $a + b + c = 3k'$. $100a + 10b + c = 3(k' + 33a + 3b)$. Comme $k' + 33a + 3b$ est entier, $100a + 10b + c$ est divisible par 3.	**4 points**
3.	Si x est un terme de la suite u, alors la somme de ses chiffres est divisible par 3. D'après la propriété précédente, x est donc divisible par 3. Alors $x + 3$ est aussi divisible par 3, et d'après la propriété, la somme des chiffres de $x + 3$ est divisible par 3. Ce qui implique que $x + 3$ est un terme de la suite u.	**2 points**
4.	Si x est un terme de la suite u, alors x est divisible par 3, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $x = 3k$. Alors $x + 1$ ne peut être un terme de la suite u : en effet, si $x + 1$ était un terme de la suite u, alors il existerait un entier k' tel que $x + 1 = 3k'$. On aurait donc $x + 1 - x = 3k' - 3k$, ou encore $1 = 3(k' - k)$ ce qui est impossible vu que $k' - k$ est un entier. De même, $x + 2$ ne peut être un terme de la suite u. On en déduit que, quel que soit le terme x de la suite u, le terme suivant x dans cette suite est $x + 3$. Par conséquent, les écarts maximal et minimal entre deux termes consécutifs sont égaux à 3.	**4 points**
Partie B :		
1.	Les trois premiers termes de la suite v sont 5, 14 et 19 : les 7 termes suivants sont 23, 28, 32, 37, 41, 46 et 50.	**2 points**
2.	L'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite v est 1 car 49999 et 50000 sont deux termes de la suite v.	**2 points**
3.a.	Soit x un terme de la suite v; il existe alors un entier positif k tel que $\square(x) = 5k$. Si x finit par un chiffre compris entre 0 et 4, alors $0 \le R < 5$. La division euclidienne de $x + 5$ par 10 s'écrit $x + 5 = 10y + R + 5$, avec $0 \le R + 5 < 10$. De fait, $\square(x + 5) = \square(y) + R + 5 = \square(x) + 5 = 5k + 5 = 5(k + 1)$. Ce qui prouve que $x + 5$ est un terme de la suite v si x est un terme de v finissant par un chiffre compris entre 0 et 4.	**4 points**
3.b	Soit x un terme de la suite v ; si x finit par un chiffre compris entre 0 et 4, alors $x' = x + 5$ est un terme de la suite v.	**4 points**

Si x finit par un chiffre compris entre 5 et 9, alors $x' = x + 5$ finit par un chiffre compris entre 0 et 4.
On peut donc ajouter à x' un entier i compris entre 0 et 4 en ne changeant que son chiffre des unités. On a alors, pour tout entier $0 \leq i \leq 4$, □$(x'+i)$ = □$(x') + i$. Il suffit de choisir convenablement i de sorte que $x' + i$ soit un terme de la suite v.
Pour cela, on examine alors la somme des chiffres de x' et en particulier le reste de sa division euclidienne par 5 :

Reste de la division euclidienne. de □(x') par 5	0	1	2
Nouveau terme de la suite v	$x' = x + 5$	$x' + 4 = x + 9$	$x' + 3 = x + 8$

On en déduit que l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite v est inférieur ou égal à 9.
Par conséquent l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite v est exactement 9 car 5 et 14 sont deux termes consécutifs de la suite.

Partie C

a. **2 points**

L'entier 111 111 111 999 999 999 est un terme de la suite w car la somme de ses chiffres est 90.
L'entier suivant 111 111 112 000 000 000 est aussi un terme de la suite w car la somme de ses chiffres est 10.
L'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite w est donc 1.

b. **4 points**

Soit x un terme de la suite w ; il existe deux entiers positifs ou nuls y et R tels que $x = 10y + R$, avec $0 \leq R < 10$.
On ajoute ensuite l'entier $A = 10 - R$ pour obtenir x', sachant que $1 \leq 10 - R \leq 10$.
Alors $x' = x + A = 10y + R + 10 - R = 10(y + 1) + 0$: x' finit par le chiffre 0.
On peut donc ajouter à x' un entier i compris entre 0 et 9 en ne changeant que son chiffre des unités.
On a alors, pour tout entier $0 \leq i \leq 9$, □$(x'+i)$ = □$(x') + i$. On peut choisir convenablement i de sorte que $x' + i$ soit un terme de la suite w.
Pour cela, on examine alors la somme des chiffres de x' et en particulier le reste de sa division euclidienne par 10 :

Reste de la d.v.e. de □(x') par 10	0	1	2
Nouveau terme de la suite w	$x' = x + A$	$x' + 9 = x + A + 9$	$x' + 8$ $= x + A$

Reste de la d.v.e. de □(x') par 10	5	6	7
Nouveau terme de la suite w	$x' + 5$ $= x + A + 5$	$x' + 4$ $= x + A + 4$	$x' + 3$ $= x + A$

On en déduit que l'écart entre deux termes consécutifs de la suite w est inférieur ou égal à $A + 9$, c'est-à-dire toujours inférieur ou égal à 19 (vu que A est inférieur ou égal à 10). Il en est de même de l'écart maximal.
Enfin, cet écart maximal est exactement 19 puisque 9100 et 9119 sont deux termes consécutifs de la suite w.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats de la série non S)

		Barème
1.a	$F_5=21$, $F_6=34$ et $F_7=55$. $u_5=3$, $u_6=4$ et $u_7=1$. Les notes correspondantes sont *re#, mi* et *do*.	**2 points**
1.b	Si les deux premières notes sont *ré* et *mi*, alors $u_0=2$ et $u_1=4$ et les termes suivants sont alors : $u_2=0$, $u_3=4$, $u_4=4$, $u_5=2$, $u_6=0$, $u_7=2$, $u_8=2$ et $u_9=4$. Les dix premières notes sont donc : ré, *mi*, *do*, *mi*, *mi*, *ré*, *do*, ré, ré, mi.	**2 points**
2.	Comme u_n est le reste d'une division euclidienne par m, entier inférieur ou égal à 12, on a $u_n\leq 11$ et donc $u_n\in\{0,1,\ldots,11\}$. Chaque terme de cette suite correspond donc à une unique note.	**2 points**
3.a	La mélodie qui commence par les notes *do* et *mi* correspond à la suite : **0 ; 4 ; 4 ; 8 ; 0 ; 8 ; 8 ; 4 ;** 0; 4 ; 4 ; 8 ; … La suite de notes comporte bien une boucle de période 8.	**3 points**
3.b	En prenant par exemple *do* et *do#* donc $u_0=0$ et $u_1=1$, on obtient la suite : **0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 1 ; 9 ; 10 ; 7 ; 5 ; 0 ; 5 ; 5 ; 10 ; 3 ; 1 ; 4 ; 5 ; 9 ; 2 ; 11 ; 1** ; 0 ; 1 ; 1 ; … La suite de notes comporte bien une boucle de période 24.	**3 points**
3.c	Si la suite commence par *do* ; *do*, on n'a qu'une seule note. Si la suite commence par *do* ; *fa#*, c'est-à-dire $u_0=0$ et $u_1=6$, on a une boucle de période 3 : **0 ; 6 ; 6** ; 0 ; 6 ; 6 ; …	**3 points**
4.a	La situation se traduit par $u_8=7$ et $u_9=5$. On peut reconstituer la suite : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 1 ; 9 ; 10 ; **7 ; 5** ; … Les deux premières notes sont *do#* et *ré*.	**3 points**
4.b	Si on connaît deux notes consécutives quelconques, on peut évidemment en déduire toutes les notes qui suivent. De plus, vu que $u_n=u_{n+2}-u_{n+1}$, il est possible également de reculer et trouver les notes précédentes comme dans la question 4. a). Par ailleurs, il existe un nombre fini de paires (a ; b), où a et b sont des nombres entiers strictement inférieurs à 12. Or la suite étant infinie, on va donc rencontrer au moins deux fois la paire (a ; b) de deux notes consécutives. Comme on peut « remonter », à partir de n'importe quel couple de notes, aux deux premières notes, on va alors retrouver au moins deux fois ce premier couple de notes. La mélodie est donc périodique.	**4 points**
4.c	Le nombre de paires (a ; b) est m^2, donc une période est nécessairement inférieure ou égale à 144.	**3 points**
4.d	Si la mélodie commence par *la* et *si*, alors $u_0=9$ et $u_1=11$. Par périodicité, le terme 9 apparaît donc une infinité de fois dans la suite (u_n). La note *la* apparaît ainsi une infinité de fois dans la mélodie.	**2 points**
5.	Il y a 144 couples $(u_0\,;u_1)$ qui donnent chacun une unique mélodie et, réciproquement, toutes les mélodies sont déterminées par leur deux premières notes. Il y a donc 144 mélodies.	**3 points**