<u>Exercice National 1 :</u> *La Rosace* (proposée par l'académie d'Amiens):

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2. *a.* <u>Première méthode :</u>
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{\text{CAD}} = 30°$. Donc $\widehat{\text{BCD}} = 60°$.
   Et puisque $\text{BC} = \text{DC}$, le triangle BCD est donc équilatéral.
   Ensuite, $\widehat{\text{BDA}} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $\text{BD} = \text{BA}$.
   Finalement, on trouve bien $\text{AB} = \text{BC}$.
   <u>Deuxième méthode :</u>
   On note R le rayon du grand cercle.
   On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{\text{DAC}} = \dfrac{\text{DC}}{\text{AC}}$, d'où $\sin 30° = \dfrac{R}{\text{AC}}$.
   Puisque $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\text{AC} = 2R$.
   Or $\text{BC} = R$, d'où $\text{AB} = R$. Finalement $\text{AB} = \text{BC}$.

   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
   En appliquant le résultat précédent, il vient que $\text{AE} = 2r$. De plus, $\text{EB} = r$.
   On obtient donc $\text{AB} = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.
3. On doit avoir $\text{AD} = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

   La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{\text{BEF}}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{\text{BCD}}$.

   Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$.

   Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

Exercice National 2 : ***A la recherche du « chaînonze »*** **(proposée par Nancy-Metz)**

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^e terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
   Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3+x-2=0$ et $3+x-2=11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
   a. Si $b=a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».
   b. Si $b=a-1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11-(a-b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b<a-1$, on a le chaînonze « $a\ b\ (11-a+b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b<a-1$, on a $-10 < b-a < -1$ d'où $1 < 11-a+b < 10$.
   d. Si $a < b$, « $a\ b\ (b-a)$ » avec $b-a$ est bien un chiffre car $0 < b-a < 10$.
   Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a = b$**
   Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
   Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
   Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « $a\ a\ 0\ (11-a)\ (11-a)\ 0\ a\ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.
   2^e cas : $a = b + 1$
   la chaîne se bloque et est de longueur 2.
   3^e cas : $a = 0$ et $b = 1$
   « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.
   4^e cas : $0 < a < b$,
   « $a\ b\ (b-a)\ (11-a)\ (11-b)\ (11+a-b)\ a\ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si
   - $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
   - $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

   5^e cas : Si $b = 0$ et $a > 1$
   le prolongement est « $a\ 0\ (11-a)\ (11-a)\ 0\ a$ » et le chaînonze est infini.

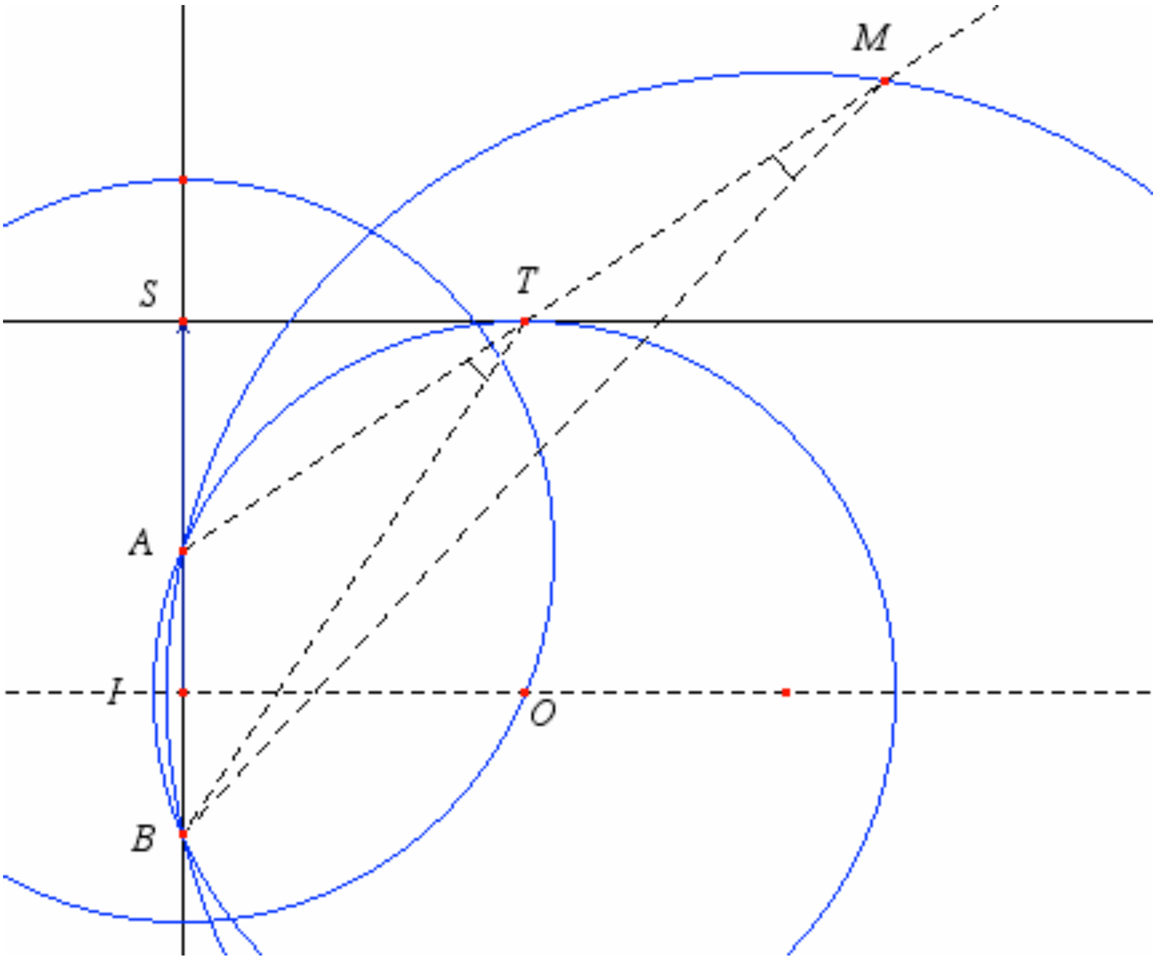
6[e] cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

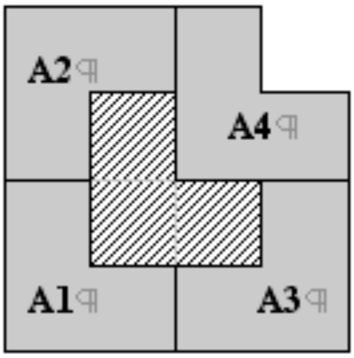
Exercice 3 - série S - *(Académique)* ***Angle de tir***



1. On utilise la propriété de l'angle inscrit pour proposer des points sur le cercle circonscrit au triangle ABM.
2. Le joueur « marque un essai » au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment $[SS']$ pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).
   a. Si le cercle circonscrit au triangle ABM coupe la droite (SS') les (ou le) points conviennent.
   b. Tout d'abord la position optimale correspond au point T de tangence d'un cercle centré sur la médiatrice de $[AB]$ et passant par A et B.
   On montre d'abord comment construire ce point T : Le cercle de centre A et de rayon IS coupe la médiatrice en un point O. Le cercle de centre O et passant par A (passera aussi par B puisque O est sur la médiatrice de $[AB]$) et est tangent à la droite (SS') puisque la distance de O à la droite (SS') est égale au rayon OA.
   Ce point T correspond à l'angle de tir optimum en effet, la règle du jeu impose de choisir un point du segment $[SS']$, soit $N \neq T$ un point de $[SS']$; le cercle circonscrit à ABN (a un rayon strictement supérieur à OA puisque sécant et non tangent à (SS')) permet la configuration ci-dessus qui montre que la mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ est supérieur à

celle de $\widehat{AMB}$ et donc à toutes les mesure des angles inscrits dans le cercle circonscrit à AMB
Remarque : On n'envisage pas la position du point S entre A et B, la solution est alors triviale et n'apporte rien à la modélisation d'une situation réelle.

Exercice 4- série S - *(Académique)* ***Damiers tronqués et Triminos***



1. A1...A4 et le trimino central recouvrent un damier de 2^2 cases avec une case de coin enlevée.
2. Pour $n = 4$ il suffit d'imaginer que les Ai sont des damiers de 2^2 cases de côté avec un coin enlevé.
3. Supposons que l'on sache recouvrir un damier de 2^n cases avec une case de coin enlevée, alors en disposant quatre de ces damiers recouverts comme sont disposés A1, A2 ; A3 et A4 puis en comblant le centre avec un trimino (le hachuré) on a recouvert un damier de 2^{n+1} cases de côté avec une case de coin enlevée.

4. $2^{2^{2010}} - 1$ est le nombre de cases d'un damier de $2^{2^{2009}} - 1$ cases de côté avec une case de coin enlevée. Il est donc recouvrable par des triminos d'après la question précédente, donc ce nombre est divisible par 3.

Exercice 3 - autres séries - *(Académique)* ***Le jeu de « Nîmes »***

Partie A : Il reste 6 bâtonnets

1. Partie gagnante : MOI : 2 / LUI : 1 / MOI : 3 / reste 0.
   Partie perdante : MOI : 1 / LUI : 1 / MOI : 3 / LUI 1/ reste 0.
2. Il suffit de laisser l'ordinateur avec 4 bâtonnets.

Partie B : **Avec n bâtonnets**

1. Pour $n = 101$, il suffit de maintenir l'adversaire devant un multiple de 4 bâtonnets. Ainsi si on enlève 1 bâtonnet, l'adversaire aura devant lui 100 bâtonnets, qu'il en enlève 1 ou 2 ou 3, au coup suivant il en aura 96 et après 24 coups, il en aura 4 donc il aura perdu au prochain coup.
2. Si n est un nombre entier non nul non multiple de 4 donc $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$, le premier coup sera de présenter à l'adversaire $4k$ bâtonnets en en enlevant respectivement 1, 2 ou 3.
   Si n est un multiple de 4, l'adversaire peut appliquer la stratégie gagnante puisqu'il aura devant lui $n = 4k - 1$ ou $n = 4k - 2$ ou $n = 4k - 3$ bâtonnets.

Partie C : **Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu.** On vous laisse trouver.

Exercice 4 - autres séries - *(Académique)* ***Damiers et dominos***

Partie A : **Il reste 6 bâtonnets**

1. Un damier de 9 cases de côté a donc un nombre impair de cases. Pour recouvrir par des dominos, il est nécessaire que le nombre de cases soit pair(Donc recouvrement impossible).
2. Un tel damier contient $(2n)^2 - 1$ cases or $4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1)$, c'est un nombre impair produit de deux nombres impairs d'où impossibilité. (un contre exemple avec $n = 1$ était un raisonnement valable)
3. Quand on recouvre par des dominos, on couvre une case blanche et une case noire. Or un damier de $2n$ cases de côté auquel on a retiré les deux cases extrémités d'une diagonale ne contient plus un nombre égal de cases noires et blanches d'où impossibilité (encore une fois, l'énoncé permettait une démonstration par contre exemple).
4. Même considération de parité du nombre de cases que dans la question 2.
5. (La parité, condition nécessaire, est ici satisfaite). On pouvait utiliser un raisonnement par récurrence (comme on l'appelle dans certaines séries!) : Pour $n = 1$, donc 3 cases de côté et 8 cases en tout, on s'en convainc par un dessin. On peut alors border par des dominos pour former un damier de 5 cases de côté avec une case otée "en haut à gauche". Reste à mettre en forme la propriété dite "héréditaire"; celle-ci pouvait s'exprimer par un dessin d'autant plus convaincant que la méthode pour border était simple (par exemple en disposant les dominos de bordure perpendiculairement aux côtés du damier).