Éléments de correction - SUJET série S - :

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

			2			
		7		1		
	6				9	
5		3		4		8

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\dfrac{6+45}{3} \leq S \leq \dfrac{24+45}{3}$

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

			1			
		8		4		
	6				9	
2		5		7		3

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

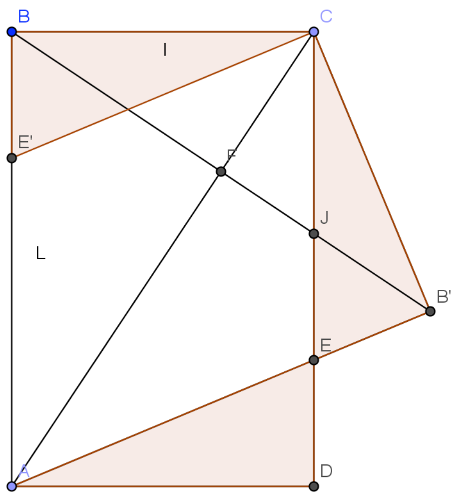
b. Triangle 19-magique

			7			
		4		1		
	5				9	
3		8		6		2

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle S-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
18 n'est pas S-magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16 - c)^2 + 8^2 = c^2$ soit $c = 10$

3- On a nécessairement : $(L - 7{,}5)^2 + l^2 = 7{,}5^2$
avec $L \geq 8$
soit : $l^2 = L(15 - L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L - c)l = 0{,}25Ll$ d'où $c = 0{,}75L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Exercice 3 :

1) $1005^2 - 2009$ représente le nombre de carreaux colorés ; il faut et il suffit que ce nombre soit un carré parfait pour représenter le nombre de carreaux du carré coloré : 1004^2

2) En notant on a l'équation : $a^2 - b^2 = 2009$ soit $(a - b)\,(a + b) = 2009$
or : $2009 = 41 \times 7^2$.
Dans cette équation les deux facteurs sont des entiers naturels et $a > b$
Donc $(a + b)$ divise 41×7^2 donc : $(a + b) = 41 \times 7^2$ ou $(a + b) = 41 \times 7$ ou $(a + b) = 7^2$

On obtient : $\begin{cases} a+b = 41\times 7\times 7 \\ a-b=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b = 41\times 7 \\ a-b=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b = 7\times 7 \\ a-b=41 \end{cases}$

en résolvant on a : $a = 1005$ ou $a = 147$ ou $a = 45$.
On vérifie que ces trois nombres sont effectivement solution du problème.

Exercice 4 :

1)
2- a) En appelant T le point où (MN) est tangente au cercle :
on a : $MT = MA =$
ra$x$ et $NT = NB = y$ (configuration classique, on peut aussi détailler en montrant que les deux triangles MAO et MTO sont isométriques puisque rectangles avec des côtés homologues égaux)
Donc $x + y = MT + NT = MN$

b) Le triangle MON est rectangle en O
(par des considérations angulaires par exemples : $AOT = 2\,MOT$ et $TOB = 2TON$ donc
$AOB = 2\,MON = \frac{\pi}{2}$)
Dans ce triangle MON rectangle dont OT est une hauteur : $OT^2 = MT \times NT$ (en montrant
- d'abord que MOT et ONT sont semblables : $MOT + OMT = \frac{\pi}{2}$ et $OMT + MNO = \frac{\pi}{2}$ donc
$MOT = MNO$
- puis en appliquant la proportionnalités des côtés homologues : $\frac{MT}{OT} = \frac{OT}{NT}$
On a donc $OT^2 = OA^2 = MT \times NT = xy$

3) Il y a de multiples constructions possibles. En utilisant ce qui précède, on construit par des reports de longueurs, deux segments de longueur x (donnée) et y telles que $xy = 1$.
Par exemple :
- On trace la perpendiculaire en O à (OI) et on trace le cercle ce centre Ω de rayon 1 et tangent à (OI) en O. Ce cercle recoupe $(O\Omega)$ en O'.
- On construit (Δ) la perpendiculaire à $(O\Omega)$ tangente au cercle en O'.
- A partir de M on trace l'autre tangente au cercle. Elle coupe (Δ) en N.
- On a $NO' = y$, et xy =1 d'après 2) . Reste à reporter ces longueurs pour définir les côtés d'un rectangle.