CLASSES DE PREMIERES GENERALES ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES
Académie de MONTPELLIER
Session 2008

Correction

Durée : 4 heures

Série S

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

La rédaction et la qualité des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Remarque : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990*.

Solution de l'exercice 1 : Les bons nombres

1. Remarque préliminaire : toute décomposition contenant 1 donnera une somme d'inverse strictement supérieure à 1 et ne permettra pas de conclure. Nous pouvons donc éliminer toute décomposition additive de ce type.

$4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc 4 est « bon ».

$5 = 2 + 3$ (seule décomposition additive ne contenant pas 1)

et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$ donc 5 est « mauvais ».

$6 = 2+2+2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

$6 = 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$

$6 = 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 6 est « mauvais »

$7 = 2 + 5$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$

$7 = 2+2+3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$

$7 = 3 + 4$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 7 est « mauvais »

$8 = 2 + 2 + 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

$8 = 2 + 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

$8 = 2 + 3 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$

$8 = 2 + 6$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \neq 1$

$8 = 3 + 5$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$

$8 = 4 + 4$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 8 est « mauvais »

$9 = 3 + 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ donc 9 est « bon ».

$10 = 4 + 4 + 2$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ donc 10 est « bon ».

2. Le carré d'un nombre entier naturel n s'écrit sous la forme n², et comme :

$n^2 = n \times n = \underbrace{n + n + n + n + \ldots + n}_{(\text{ n fois})}$ et que $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{(\text{n fois})} = n \times \frac{1}{n} = 1$

on en conclut que n^2 est toujours « bon ».

3. Soit n un entier naturel dit « bon », alors il existe k entiers naturels tels que :

$$n = p_1 + p_2 + \ldots + p_K \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = 1$$

Donc $2n + 2 = 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_K) + 2 = 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_K +2$

et $\frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} +\ldots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$

De plus :

$2n + 9 = 2n + 3 + 6 = 2(p_1 + p_2 + \ldots + p_K) + 3 + 6 = 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_K + 3 + 6$

et $\frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} +\ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}) + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(1) + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Donc si n est « bon », alors 2n + 2 et 2n + 9 sont « bons » aussi.

4. **Préliminaires :**

Nous allons observer dans un premier temps les liens entres les entiers compris entre 24 et 55, 2n + 2, 2n + 9 et les entiers suivants 55 :

n nombre pair de la forme 2k + 2	n nombre impair de la forme 2k+ 9
$56 = 2 \times 27 + 2$	$57 = 2 \times 24 + 9$
$58 = 2 \times 28 + 2$	$59 = 2 \times 25 + 9$
$60 = 2 \times 29 + 2$	$61 = 2 \times 26 + 9$
$62 = 2 \times 30 + 2$	$63 = 2 \times 27 + 9$
$64 = 2 \times 31 + 2$	$65 = 2 \times 28 + 9$
$66 = 2 \times 32 + 2$	$67 = 2 \times 29 + 9$
$68 = 2 \times 33 + 2$	$69 = 2 \times 30 + 9$
$70 = 2 \times 34 + 2$	$71 = 2 \times 31 + 9$
$72 = 2 \times 35 + 2$	$73 = 2 \times 32 + 9$

Comme les entiers de 24 à 35 sont « bons », on peut donc en conclure que les entiers de 56 à 73 sont « bons » aussi.

Généralisation à tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 56 :

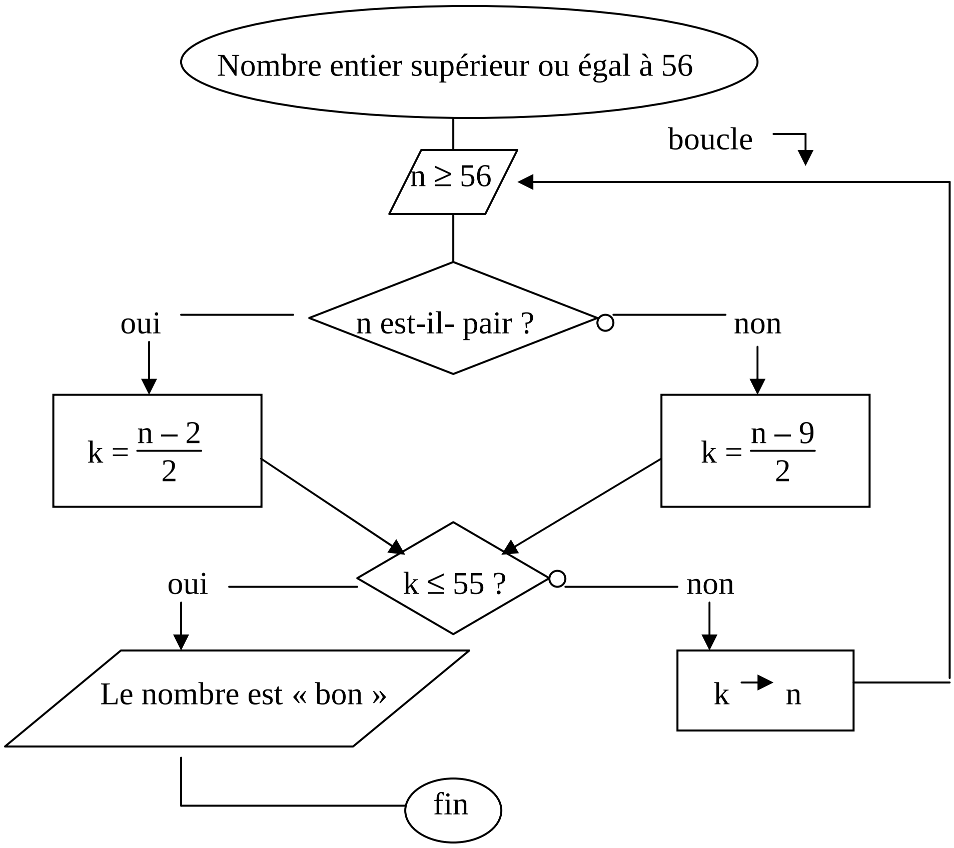
Si n est un nombre pair supérieur ou égal à 56 alors : $n = 2k + 2$ et $k \geq \frac{56 - 2}{2}$

autrement dit : $k \geq 27 \geq 24$

Si n est un nombre impair supérieur ou égal 57 alors : $n = 2k + 9$ et $k \geq \frac{57 - 9}{2}$

autrement dit : $k \geq 24$

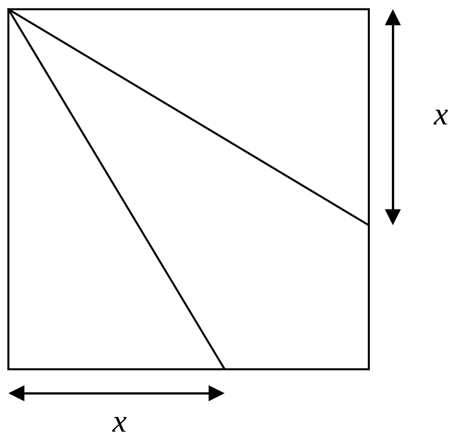
L’algorigramme suivant permet de conclure :



La boucle crée une suite d’entiers naturels strictement décroissante et minorée par 24. Il existera donc obligatoirement après un ou plusieurs tours un entier k inférieur ou égal à 55 et supérieur à 24.

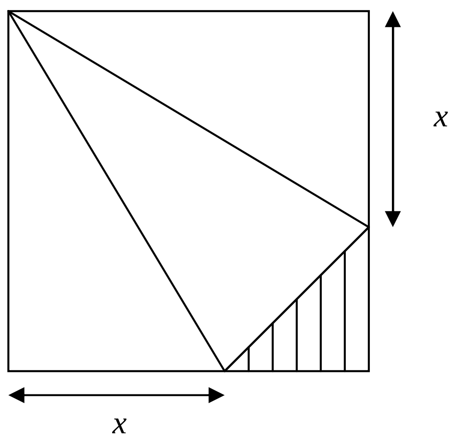
On peut donc en conclure que tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 56 sont « bons ».

Exercice 2 : Un partage équitable



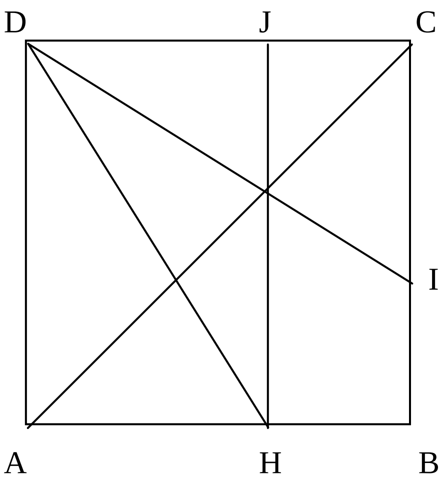
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à *x* pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?

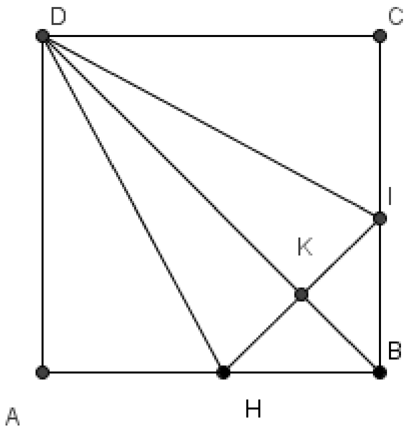


3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Solution de l'exercice 2 : Un partage équitable

1. Le carré étant de coté 1, on a : $0 < x < 1$



(BD) est un axe de symétrie de la figure, donc pour toute valeur de x :

$$\text{Aire}_{DCI} = \text{Aire}_{DAH}$$

Les trois surfaces ont la même aire si :

$$\text{Aire}_{DHBI} = \text{Aire}_{DIC}.$$

Comme (BD) partage le quadrilatère DHBI en deux triangles de même aires :

$$\text{Aire}_{BDH} = \text{Aire}_{BDI} = \frac{\text{Aire}_{DHBI}}{2}$$

On a donc $\text{Aire}_{DBI} = \dfrac{\text{Aire}_{DIC}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{DC \times IB}{2} = \frac{DC \times IC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad IB = \frac{IC}{2} = \frac{x}{2}$$

et comme $IB = BC - IC = 1 - x$

on en déduit l'équation :

$$\frac{x}{2} = 1 - x \Leftrightarrow x = 2(1 - x) \Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x + 2x = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Léonard doit donc donner la valeur $\frac{2}{3}$ à x pour partager sa surface en trois de même aire.

2. Avec les notations de la figure établie à la question 1, pour que les trois triangles aient la même aire, il suffit d'avoir :

$$\text{Aire}_{DHI} = \text{Aire}_{DIC} \quad (1)$$

DHI étant isocèle en D par construction, la droite (DK) est sa hauteur issue de D,

d'où : $(1) \Leftrightarrow \dfrac{DK \times HI}{2} = \dfrac{DC \times IC}{2}$

$(1) \Leftrightarrow DK \times HI = DC \times IC$

$(1) \Leftrightarrow (DB - KB) \times HI = DC \times IC$, car $DK = DB - KD$

En posant $x = CI = AH$, on a $BI = HB = (1 - x)$

Comme HI est l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle HBI,

$$HI = \sqrt{2} \times BI = \sqrt{2}\,(1 - x)$$

De plus le triangle IKB est rectangle isocèle car les droites (BD) et (HI) sont perpendiculaires et l'angle $\widehat{KBI}$ mesure 45°, donc :

$$KB = IK = \frac{IB}{\sqrt{2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2}}$$

Et $DB = \sqrt{2}$ car c'est la diagonale du carré qui a pour côté 1.

L'équation (1) est donc équivalente :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - \frac{1 - x}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}(1 - x)\right) = 1 \times x$$

$(1) \Leftrightarrow 2\,(1-x) - (1-x)^2 = x$
$(1) \Leftrightarrow 2 - 2x - 1 + 2x - x^2 = x$
$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

Equation du second degré :

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

Il y a donc deux solutions à cette équation :

$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, ne vérifie pas la condition $0 < x < 1$

et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ qui vérifie $0 < x < 1$.

Donc les trois parties de Léonard peuvent avoir la même aire pour la valeur de x égale à $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ qui n'est autre que le nombre d'or.

3. On considère le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

le point A a pour coordonnées (0;0)
le point B a pour coordonnées (1,0)
le point C a pour coordonnées (1,1)
le point D a pour coordonnées (0,1)
le point H a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$
le point I a pour coordonnées $\left(1 - \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, 1\right)$
donc I $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right)$

La droite (AC) a donc pour équation $y = x$ et la droite (HJ) a pour équation $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Le point M intersection des droites (AC) et (HJ) a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

La droite (DI) a 1 pour ordonnée à l'origine qui n'est autre que l'ordonnée de D. Le coefficient directeur de cette droite (DI) se calcule à l'aide des points D et I :

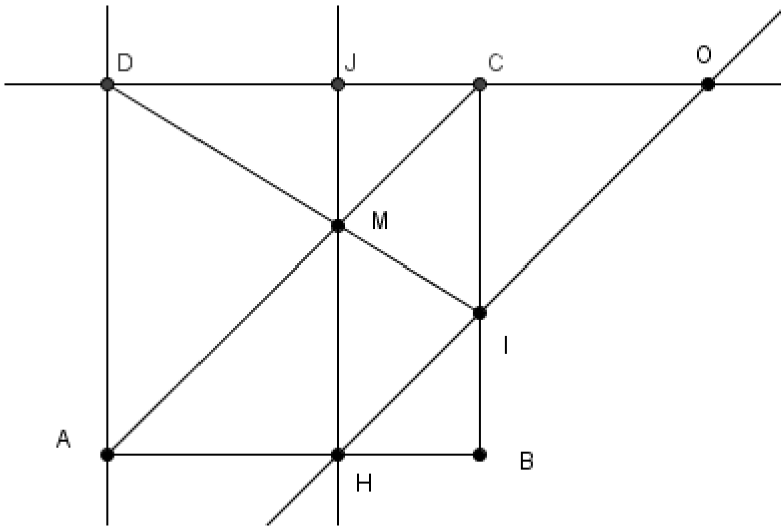
$$\frac{y_I - y_D}{x_I - x_D} = \frac{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} - 1}{1 - 0} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Donc l'équation de la droite (DI) est : $y = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} x + 1$.

Le point M' intersection des droites (DI) et (HJ) a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} * \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1\right)$, ce qui donne M' $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

Autrement dit M et M' sont confondus et les droites (DI), (AC) et (HJ) sont concourantes.

Autre solution: On complète la construction de Léonard avec les notation suivantes :



On considère l'homothétie *h* de centre D transformant le point C en J, d'après le théorème de Thalès utilisé dans les triangles DCI et DJM avec (JM) et (CI) parallèles, cette homothétie transforme aussi I en M. De plus la droite (HI) se transforme en une droite parallèle passant par l'image de I, c'est à dire M.

Pour prouver que les droites (JH), (DI) et (AC) sont concourantes en M on va montrer qu'elles sont les images respectives des droites (CI), (DI) et (HI) concourantes en I par l'homothétie *h*.

D'après ce qui précède on a :

$$h(\mathrm{C}) = \mathrm{I},\ h(\mathrm{I}) = \mathrm{M} \Rightarrow h((\mathrm{CI})) = (\mathrm{IM}) = (\mathrm{JH})$$
$$h(\mathrm{D}) = \mathrm{D},\ h(\mathrm{I}) = \mathrm{M} \Rightarrow h((\mathrm{DI})) = (\mathrm{DM}) = (\mathrm{DI})$$

Il reste donc à prouver que la droite (AC) est bien l'image de (HI) par l'homothétie *h*.
Comme la droite (AC) est parallèle à la droite (HI) car les triangles ABC et HBI sont tous deux rectangles isocèles en B et que les angles $\widehat{\mathrm{BIH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}$ sont correspondants et égaux à 45°. Il suffit donc pour montrer que la droite (AC) et l'image de la droite (HI) par *h*, de montrer que l'image d'un point particulier de la droite (HI) est sur la droite (AC).

Soit O le point d'intersection entre les droites (HI) et (DC). Nous allons montrer que son image par *h* est C.

Le triangle ICO est rectangle isocèle en C. En effet ABCD étant un carré donc les droites (DC) et (CB) qui sont aussi respectivement (CO) et (CI), sont perpendiculaires, autrement dit l'angle $\widehat{\mathrm{ICO}}$ mesure 90°. De plus le triangle HBI étant rectangle isocèle en B, l'angle $\widehat{\mathrm{BIH}}$ mesure 45°. Comme les angles $\widehat{\mathrm{BIH}}$ et $\widehat{\mathrm{CIO}}$ sont opposés par le sommet, ils sont de même mesure :45° ce qui permet d'affirmer que le triangle ICO est rectangle isocèle en C. Donc :

$$CO = CI = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$, d'après la question 2.

Pour tous les points du plan on à toujours l'égalités vectorielle :

$$\overrightarrow{DC} = \frac{DC}{DO}\,\overrightarrow{DO}$$

Soit O' l'image de O par *h*, alors :

$$\overrightarrow{DO'} = \frac{DJ}{DC}\,\overrightarrow{DO}$$

Pour montrer que O' et C sont confondus, il suffit donc de montrer l'égalité suivante :

$$\frac{DC}{DO} = \frac{DJ}{DC}$$

Or

$$\frac{DC}{DO} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{5}-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2} = \frac{-2(\sqrt{5}-1)}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{DJ}{DC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

En conclusion, les rapports sont égaux donc C est l'image de O par l'homothétie *h* et la droite (AC) est bien l'image de la droite (HI) par l'homothétie *h*. Les trois droites (JH), (DI) et (AC) sont bien concourantes en un points M comme images des trois droites concourantes en I : (CB), (DI) et (HI) par l'homothétie *h*.

Exercice 3 : 2008 dans tous ses états

On construit une suite de nombres rangés dans un ordre croissant, constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.
Le premier nombre, de rang 1, est ainsi 0, le second, de rang 2, est 2, le troisième, de rang 3, est 8 et ainsi de suite.

Le tableau suivant donne les dix premiers éléments de cette suite :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	0	2	8	20	22	28	80	82	88	200

1. Quel est le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2, et un 8 ? Quel est son rang ?
2. Quel est le rang, en fonction de n, d'un nombre qui s'écrit avec n chiffres 8 ?
3. Quel est le rang du nombre 2008 ?
4. Comment s'écrit le nombre de rang 2008 ?

Solution de l'exercice 3 : 2008 dans tous ses états

Si un nombre n est de rang r, il y a r nombres inférieurs ou égaux à n s'écrivant avec des 0, 2 ou 8.

1. Le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2 et un 8 est 820.
   En continuant le tableau de l'énoncé on a :

Rang	1	2	3
Nombre	0	2	8

Nombres à 1 chiffre

Rang	4	5	6	7	8	9
Nombre	20	22	28	80	82	88

Nombres à 2 chiffres

Rang	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	**22**	23	24	25	26	27
Nombre	200	202	208	220	222	228	280	282	288	800	802	808	**820**	822	828	880	882	888

Nombres à 3 chiffres

On constate que 820 est de rang 22.

2. On constate que : 8 (1 chiffre 8) est de rang $3 = 3^1$
   88 (2 chiffres 8) est de rang $9 = 3^2$
   888 (3 chiffres 8) est de rang $27 = 3^3$

Le nombre constitué de n chiffres 8 étant le plus grand nombres de n chiffres, son rang sera donc le nombre de nombres que l'on peut fabriquer avec seulement les chiffres 0,2 ou 8.
Si A_n est un nombre de n chiffres, on peut l'écrire $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ où a_k est un des chiffres 0,2 ou 8.
Pour chaque a_k il y a donc 3 possibilités donc le nombre de nombres à n chiffres est

$$3\times3\times\ldots\times3\times3 = 3^n .$$

Le nombre constitué de *n* chiffres 8 est donc de rang 3^n.

3. En reprenant le tableau donné dans l'énoncé mais en commençant au rang 27, on a

Rang	27	28	29	30
Nombre	888	2000	2002	2008

On en déduit que le nombre 2008 à pour rang 30.

4. On a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ et $729 < 2008 < 2187$, donc le nombre de rang 2008 est entre 888 888 et 8 888 888.

Entre .. et ..	Il y a … nombres	Rang atteint
0 et 888 888	$3^6 = 729$	729
2 000 000 et 2 888 888	729	729 + 729 = 1458
8 000 000 et 8 088 888	243	1458 + 243 = 1701
8 200 000 et 8 288 888	243	1701 + 243 = 1944
8 800 000 et 8 800 888	27	1944 + 27 = 1971
8 802 000 et 8 802 888	27	1971 + 27 = 1998
8 808 000 et 8 808 088	9	1998 + 9 = 2007

Le nombre 8 808 088 est donc de rang 2007 par conséquent le nombre de rang 2008 est le nombre 8 808 200.

Exercice 4 : Quadrisection

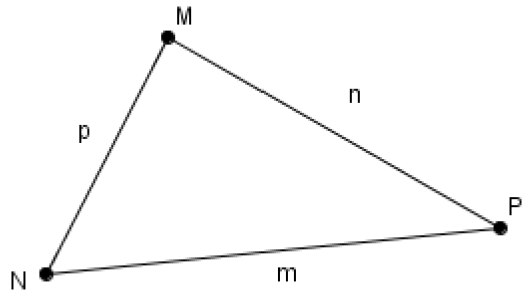
1. Construire un triangle rectangle ABC tel que la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A partagent, dans cet ordre, l'angle de sommet A en quatre angles de même mesure. Vous préciserez les mesures des trois angles du triangle.

2. Prouver qu'un triangle ayant un de ses angles partagé en 4 angles de même mesure par la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet de cet angle, dans cet ordre, est obligatoirement rectangle.

On rappelle les formules suivantes :

$$Aire(\mathrm{MNP}) = \frac{1}{2}\mathrm{mn}\sin(\hat{\mathrm{P}})$$

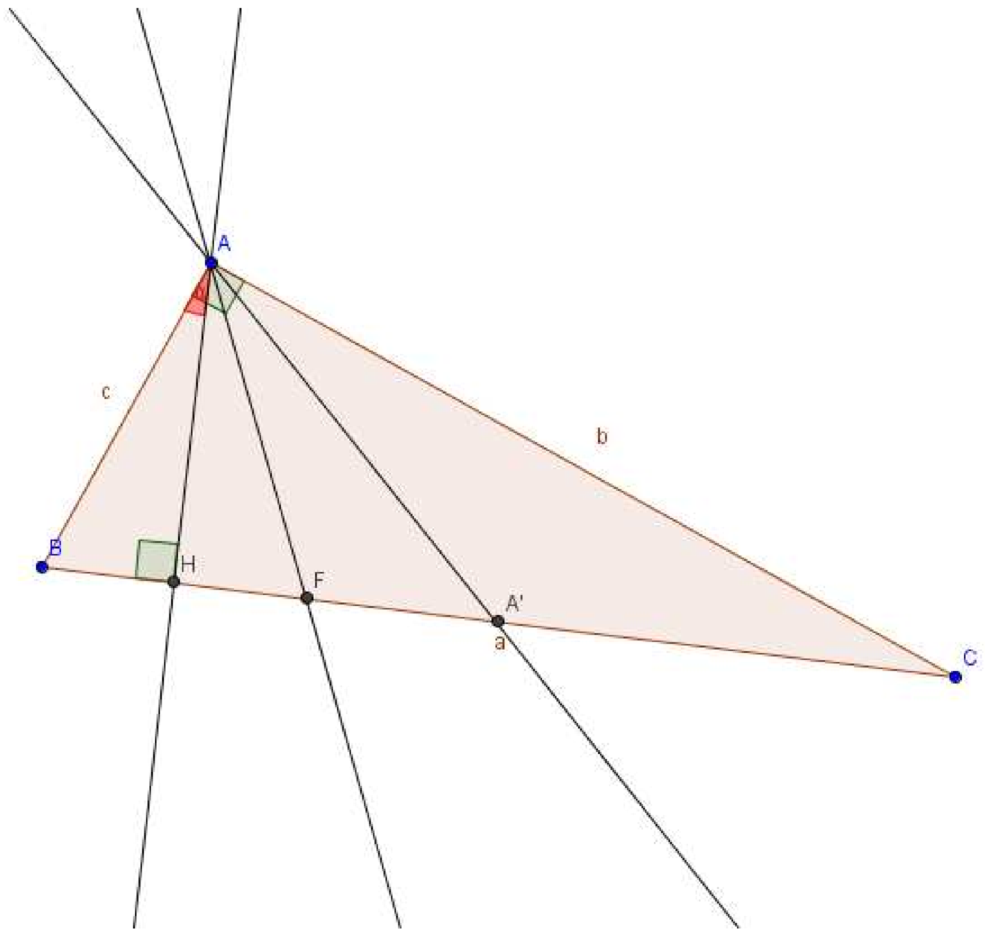
$$avec \quad \mathrm{m} = \mathrm{PN},\ \mathrm{n} = \mathrm{PM} \ \text{ et } \ \hat{\mathrm{P}} = \widehat{\mathrm{MPN}}$$



$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ a = \pi - b + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4 : Quadrisection



$\alpha = 90°/4 = 22{,}5°$

comme le triangle BHA est rectangle en H : $\widehat{ABC} = 90° - \alpha = 67{,}5°$

et dans le triangle ABC rectangle en A : $\widehat{BCA} = 90° - \widehat{ABC} = \alpha = 22{,}5°$

2) Soient H le pied de la hauteur issue de A, A' le milieu de [BC] et F le point d'intersection entre la bissectrice issue de A et la droite (BC)

On pose : a = BC ; b = AC ; c = AB ; h = AH ; m = AA';

$\alpha = \widehat{BAH} = \widehat{HAF} = \widehat{FAI} = \widehat{IAC}$

On en déduit: $3\alpha = \widehat{BAA'} = \widehat{HAC}$

$4\alpha = \widehat{BAC}$, or $0 < \widehat{BAC} < \pi$, $\mathbf{0 < 4\alpha < \pi}$ **(0)**

Et aussi que: $h = c\cos(\alpha)$; dans le triangle BHA, rectangle en H.

$h = b\cos(3\alpha)$; dans le triangle HAC, rectangle en H.

D'où l'égalité : $\mathbf{c\cos(\alpha) = b\cos(3\alpha)}$ **(1)**

La droite (AA') étant la médiane issue de A dans la triangle ABC, l'aire du triangle ABA' est donc égale à l'aire du triangle AA'C. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\frac{cm\sin(3\alpha)}{2} = \frac{bm\sin(\alpha)}{2}$$

ce qui est équivalent à : $\mathbf{c\sin(3\alpha) = b\sin(\alpha)}$ **(2)**

Le produit des équations (1) et (2) donne :

$$\mathbf{bc\cos(\alpha)\sin(\alpha) = bc\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)} \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\mathbf{(3) \Leftrightarrow 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)}$$

Et comme : $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

$\mathbf{(3) \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(6\alpha)}$

$$\mathbf{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 6\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2\alpha = \pi - 6\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \mathbf{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 8\alpha = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\mathbf{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = -2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 4\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En respectant la condition (0), la première équation n'a pas de solution, seule la deuxième admet une solution pour k = 0. Cette solution est : $\alpha = \dfrac{\pi}{8}rad = 22{,}5°$

Donc les triangles ABC solutions du problème sont les triangles rectangles en A ayant les mesures angulaires déterminer à la question 1).