**CLASSES DE PREMIERES GENERALES**
**ET TECHNOLOGIQUES**

# OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES
# Académie de MONTPELLIER
# Session 2008

**Durée : 4 heures**

Correction

# Séries ES, L et Technologiques

***Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.***

***Les calculatrices sont autorisées.***

***La rédaction et la qualité des raisonnements seront prises en compte.***

# Exercice 1 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$ ; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$ ; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si $n$ est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

**Remarque** : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990*.

## Solution de l'exercice 1 : Les bons nombres

1. Remarque préliminaire : toute décomposition contenant 1 donnera une somme d'inverse strictement supérieure à 1 et ne permettra pas de conclure. Nous pouvons donc éliminer toute décomposition additive de ce type.

$4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc 4 est « bon ».

$5 = 2 + 3$ (seule décomposition additive ne contenant pas 1)

et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$ donc 5 est « mauvais ».

$6 = 2+2+2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

$6 = 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$

$6 = 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 6 est « mauvais »

$7 = 2 + 5$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$

$7 = 2+2+3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$

$7 = 3 + 4$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 7 est « mauvais »

$8 = 2 + 2 + 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$

$8 = 2 + 2 + 4$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

$8 = 2 + 3 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$

$8 = 2 + 6$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \neq 1$

$8 = 3 + 5$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$

$8 = 4 + 4$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1$

et comme il n'y a pas d'autre décomposition ne contenant pas 1 on en conclut que 8 est « mauvais »

$9 = 3 + 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ donc 9 est « bon ».

$10 = 4 + 4 + 2$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ donc 10 est « bon ».

2. Le carré d'un nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n^2$, et comme :

$$\underbrace{n^2 = n \times n = n + n + n + n + \dots + n}_{(\text{ n fois})} \qquad \text{et que } \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{(\text{n fois})} = n \times \frac{1}{n} = 1$$

on en conclut que $n^2$ est toujours « bon ».

3. Soit n un entier naturel dit « bon », alors il existe k entiers naturels tels que :

$$n = p_1 + p_2 + \dots + p_K \qquad \text{et} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$$

Donc $\quad 2n + 2 = 2(p_1 + p_2 + \dots + p_K) + 2 = 2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_K + 2$

$$\text{et } \frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} + 1\right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

De plus :

$$2n + 9 = 2n + 3 + 6 = 2(p_1 + p_2 + \dots + p_K) + 3 + 6 = 2p_1 + 2p_2 + \dots + 2p_K + 3 + 6$$

$$\text{et } \frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}\right) + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(1) + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Donc si n est « bon », alors 2n + 2 et 2n + 9 sont « bons » aussi.

**4. Préliminaires :**

Nous allons observer dans un premier temps les liens entres les entiers compris entre 24 et 55, 2n + 2, 2n + 9 et les entiers suivants 55 :

| n nombre pair de la forme 2k + 2 | n nombre impair de la forme 2k+ 9 |
|---|---|
| $56 = 2 \times 27 + 2$ | $57 = 2 \times 24 + 9$ |
| $58 = 2 \times 28 + 2$ | $59 = 2 \times 25 + 9$ |
| $60 = 2 \times 29 + 2$ | $61 = 2 \times 26 + 9$ |
| $62 = 2 \times 30 + 2$ | $63 = 2 \times 27 + 9$ |
| $64 = 2 \times 31 + 2$ | $65 = 2 \times 28 + 9$ |
| $66 = 2 \times 32 + 2$ | $67 = 2 \times 29 + 9$ |
| $68 = 2 \times 33 + 2$ | $69 = 2 \times 30 + 9$ |
| $70 = 2 \times 34 + 2$ | $71 = 2 \times 31 + 9$ |
| $72 = 2 \times 35 + 2$ | $73 = 2 \times 32 + 9$ |

Comme les entiers de 24 à 35 sont « bons », on peut donc en conclure que les entiers de 56 à 73 sont « bons » aussi.

**Généralisation à tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 56 :**

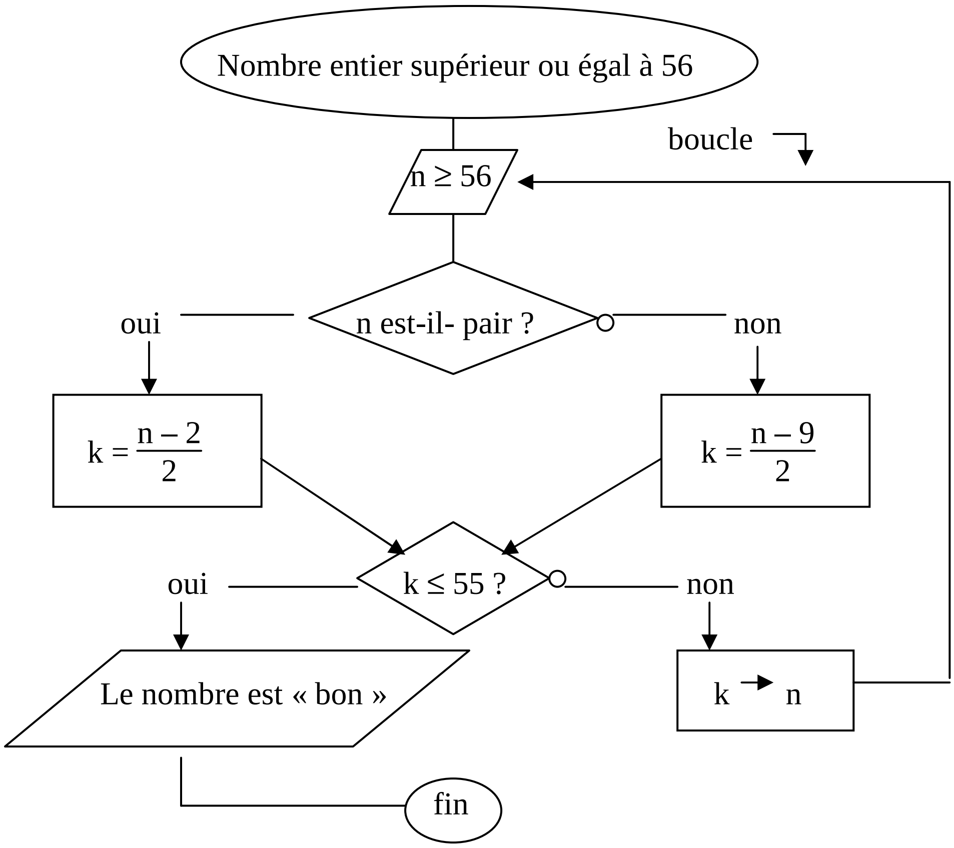
Si n est un nombre pair supérieur ou égal à 56 alors : $\quad n = 2k + 2$ et $k \geq \dfrac{56 - 2}{2}$

autrement dit : $k \geq 27 \geq 24$

Si n est un nombre impair supérieur ou égal 57 alors : $n = 2k + 9$ et $k \geq \dfrac{57 - 9}{2}$

autrement dit : $k \geq 24$

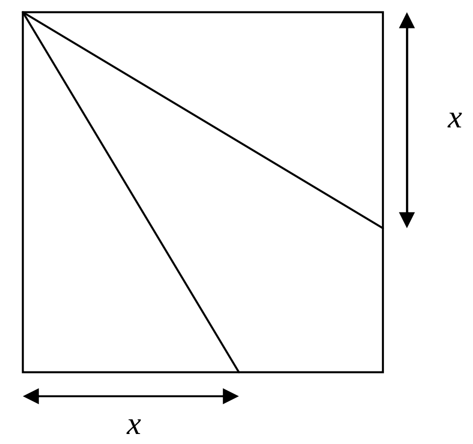
L’algorigramme suivant permet de conclure :




La boucle crée une suite d’entiers naturels strictement décroissante et minorée par 24. Il existera donc obligatoirement après un ou plusieurs tours un entier k inférieur ou égal à 55 et supérieur à 24.

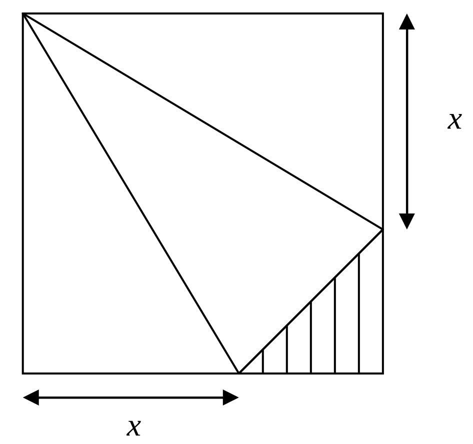
On peut donc en conclure que tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 56 sont « bons ».

# Exercice 2 : Un partage équitable



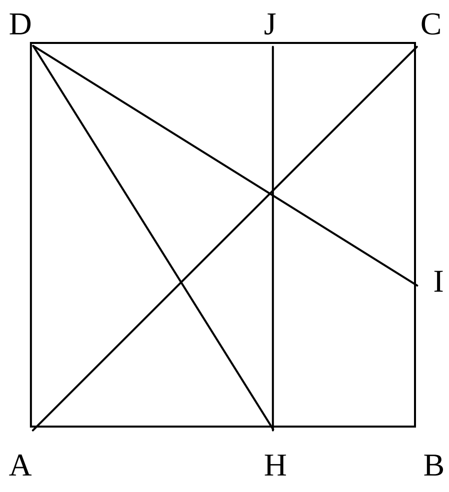

1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à $x$ pour arriver à ses fins ?




2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?

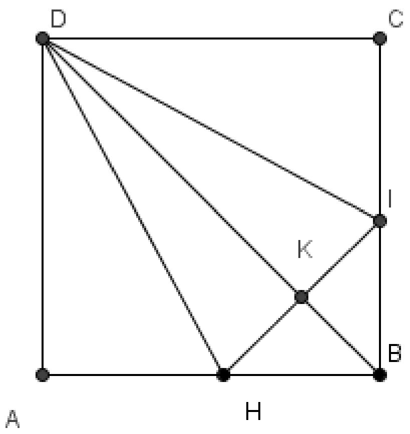



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

## Solution de l’exercice 2 : Un partage équitable

1. Le carré étant de coté 1, on a : $0 < x < 1$




(BD) est un axe de symétrie de la figure, donc pour toute valeur de x :

$$\text{Aire}_{DCI} = \text{Aire}_{DAH}$$

Les trois surfaces ont la même aire si :

$$\text{Aire}_{DHBI} = \text{Aire}_{DIC}.$$

Comme (BD) partage le quadrilatère DHBI en deux triangles de même aires :

$$\text{Aire}_{BDH} = \text{Aire}_{BDI} = \frac{\text{Aire}_{DHBI}}{2}$$

On a donc $\text{Aire}_{DBI} = \frac{\text{Aire}_{DIC}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{DC \times IB}{2} = \frac{DC \times IC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad IB = \frac{IC}{2} = \frac{x}{2}$$

et comme $IB = BC - IC = 1 - x$

on en déduit l’équation :

$$\frac{x}{2} = 1 - x \Leftrightarrow x = 2(1 - x) \Leftrightarrow x = 2 - 2x \Leftrightarrow x + 2x = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Léonard doit donc donner la valeur $\frac{2}{3}$ à x pour partager sa surface en trois de même aire.

2. Avec les notations de la figure établie à la question 1, pour que les trois triangles aient la même aire, il suffit d’avoir :

$$\text{Aire}_{DHI} = \text{Aire}_{DIC} \quad (1)$$

DHI étant isocèle en D par construction, la droite (DK) est sa hauteur issue de D,

d’où : $(1) \Leftrightarrow \frac{DK \times HI}{2} = \frac{DC \times IC}{2}$

$(1) \Leftrightarrow DK \times HI = DC \times IC$

$(1) \Leftrightarrow (DB - KB) \times HI = DC \times IC$, car $DK = DB - KD$

En posant $x = CI = AH$, on a $BI = HB = (1 - x)$

Comme HI est l’hypoténuse du triangle rectangle isocèle HBI,

$$HI = \sqrt{2} \times BI = \sqrt{2}\,(1 - x)$$

De plus le triangle IKB est rectangle isocèle car les droites (BD) et (HI) sont perpendiculaires et l’angle $\widehat{KBI}$ mesure 45°, donc :

$$KB = IK = \frac{IB}{\sqrt{2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2}}$$

Et $DB = \sqrt{2}$ car c’est la diagonale du carré qui a pour côté 1.

L’équation (1) est donc équivalente :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} - \frac{1 - x}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}(1 - x)\right) = 1 \times x$$

$(1) \Leftrightarrow 2\,(1-x) - (1-x)^2 = x$
$(1) \Leftrightarrow 2 - 2x - 1 + 2x - x^2 = x$
$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

Equation du second degré :

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

Il y a donc deux solutions à cette équation :

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, ne vérifie pas la condition $0 < x < 1$

et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ qui vérifie $0 < x < 1$.

Donc les trois parties de Léonard peuvent avoir la même aire pour la valeur de x égale à $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ qui n'est autre que le nombre d'or.

3. On considère le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

le point A a pour coordonnées (0;0)
le point B a pour coordonnées (1,0)
le point C a pour coordonnées (1,1)
le point D a pour coordonnées (0,1)
le point H a pour coordonnées $(0, \frac{\sqrt{5} - 1}{2})$
le point I a pour coordonnées $(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 1)$
donc I $(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1)$

La droite (AC) a donc pour équation $y = x$ et la droite (HJ) a pour équation $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Le point M intersection des droites (AC) et (HJ) a donc pour coordonnées $(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \frac{\sqrt{5} - 1}{2})$

La droite (DI) a 1 pour ordonnée à l'origine qui n'est autre que l'ordonnée de D. Le coefficient directeur de cette droite (DI) se calcule à l'aide des points D et I :

$$\frac{y_I - y_D}{x_I - x_D} = \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - 1}{1 - 0} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Donc l'équation de la droite (DI) est : $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\,x + 1$.

Le point M' intersection des droites (DI) et (HJ) a donc pour coordonnées $(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} * \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1)$, ce qui donne M' $(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} ; \frac{\sqrt{5} - 1}{2})$.

Autrement dit M et M' sont confondus et les droites (DI), (AC) et (HJ) sont concourantes.

# Exercice 3 : Coktails

On dispose de trois récipients A, B et C de 2 litres chacun.

Le récipient A contient un litre d'un cocktail constitué de 60% de jus d'ananas et de 40% de jus de banane.

Le récipient B contient un litre d'un cocktail constitué de 40% de jus de banane et de 60% de jus de mangue.

Le récipient C contient un litre d'un cocktail constitué de 20% de jus d'ananas, de 10% de jus de banane et de 70% de jus de mangue.

On effectue deux manipulations successives :

1ère manipulation : On verse la moitié du cocktail contenu dans le récipient A dans le récipient B et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

2ème manipulation : On verse alors un tiers du mélange obtenu dans le récipient B dans le récipient C et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

1) A l'issue de ces deux manipulations :

   Quel est le volume de jus de fruits contenu dans chaque récipient ?

   Quel est la proportion de jus d'ananas, de jus de banane et de jus de mangue dans chaque récipient ?

2) A l'issue de ces deux manipulations, quelle proportion du mélange contenu dans le récipient B et quelle proportion du mélange contenu dans le récipient C faut-il verser dans le récipient A pour que dans le récipient A, il y ait autant de jus d'ananas que de jus de banane que de jus de mangue?

# Solution de l'exercice 3 : Coktails

**1)** Chaque récipient contenant 1 litre, donnons dans les tableaux suivants la répartition dans chaque récipient à l'issue de chaque manipulation.

A l'issue de la 1ère manipulation

| Contenu en litre | Récipient A | Récipient A | Récipient A |
|---|---|---|---|
| Ananas | $1\times0{,}5\times0{,}6 = 0{,}3$ | $0 + 1\times0{,}5\times0{,}6 = 0{,}3$ | $1\times0{,}2 = 0{,}2$ |
| Banane | $1\times0{,}5\times0{,}4 = 0{,}2$ | $1\times0{,}4 + 1\times0{,}5\times0{,}4 = 0{,}6$ | $1\times0{,}1 = 0{,}1$ |
| Mangue | 0 | $1\times0{,}6 = 0{,}6$ | $1\times0{,}7 = 0{,}7$ |
| total | 0,5 | 1,5 | 1 |

A l'issue de la 2ème manipulation (en retirant un tiers du récipient B, il en reste deux tiers)

| Contenu en litre | Récipient A | Récipient A | Récipient A |
|---|---|---|---|
| Ananas | 0,3 | $0{,}3\times2/3 = 0{,}2$ | $0{,}2 + 0{,}3\times1/3 = 0{,}3$ |
| Banane | 0,2 | $0{,}6\times2/3 = 0{,}4$ | $0{,}1 + 0{,}6\times1/3 = 0{,}3$ |
| Mangue | 0 | $0{,}6\times2/3 = 0{,}4$ | $0{,}7 + 0{,}6\times1/3 = 0{,}9$ |
| total | 0,5 | 1 | 1,5 |

A l'issue de la 2ème manipulation, les volumes contenus sont donc :

dans le récipient A : 0,5 litre
dans le récipient B : 1 litre
dans le récipient C : 1,5 litre

A l'issue de la 2ème manipulation, les proportions des différents jus de fruits sont

Dans le récipient A : ananas : 0,3/0,5 = 0,6 soit 60%.
banane : 0,2/0,5 = 0,6 soit 40%.
mangue : 0%.

Dans le récipient B : ananas : 20%.
banane : 40%.
mangue : 40%.

Dans le récipient C : ananas : 0,3/1,5 = 0,2 soit 20%.
banane : 0,3/1,5 = 0,2 soit 20%.
mangue : 0,9/1,5 = 0,2 soit 60%.

**2)** Notons $p$ la proportion extraite du récipient B et $q$ celle du récipient C.

On cherche $p$ et $q$ tels que :

$$\underbrace{0{,}3+p\times0{,}2+p\times0{,}3}_{ananas}=\underbrace{0{,}2+p\times0{,}4+q\times0{,}3}_{banane}=\underbrace{0+p\times0{,}4+q\times0{,}9}_{mangue}$$

soit $\begin{cases}0{,}1=0{,}2p\\0{,}2=0{,}6q\end{cases}$ d'où $p = 1/2$ et $q = 1/3$.

Il faut verser dans le récipient A, la moitié du mélange contenu dans le récipient B et le tiers du mélange contenu dans le récipient C pour qu'il y ait la même proportion des trois jus de fruits dans le récipient A.

# Exercice 4 : Mini-sudoku

Dans le mini-sudoku, on complète une grille formée de 4 carrés 2x2 avec les chiffres 1, 2, 3, 4 de telle façon que, sur chaque ligne, chaque colonne et dans chacun des 4 carré 2x2, il n'y ait qu'une seule fois chaque chiffre.

Exemple :

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *B* | 3 | 4 | 1 | 2 |
| *C* | 2 | 1 | 4 | 3 |
| *D* | 4 | 3 | 2 | 1 |

1) Résoudre le problème ci-dessous, c'est-à-dire compléter la grille en respectant les règles du mini-sudoku. Expliquer le raisonnement.

*On pourra utiliser la notation naturelle des cases pour expliquer le raisonnement. Par exemple, Aa désigne la case contenant le* 1 *déjà placé, la ligne B contient le* 2 *déjà placé et la colonne b contient le* 3 *déjà placé, enfin le carré CDcd contient le* 4 *déjà placé.*

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | | | |
| *B* | | | 2 | |
| *C* | | 3 | | |
| *D* | | | | 4 |

2) Si on retire le chiffre 4 du tableau de la question 1), on obtient le tableau ci-dessous ; déterminer les cases dont le remplissage reste imposé.

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | | | |
| *B* | | | 2 | |
| *C* | | 3 | | |
| *D* | | | | |

3) Démontrer que si on retire un quelconque des 4 chiffres du tableau de la question 1), le problème admet alors toujours 3 solutions et 3 seulement.

# Solution de l’exercice 4 : Mini-sudoku

1)

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | **1** | 2 | 4 | 3 |
| *B* | 3 | 4 | **2** | 1 |
| *C* | 4 | **3** | 1 | 2 |
| *D* | 2 | 1 | 3 | **4** |

Da contient forcément un 2 à cause des cases Aa, Cb et Dd.
Ca contient forcément un 4 à cause des cases Aa, Cb et Da.
La dernière case libre de la colonne a est Ba qui contient donc un 3.
La figure étant symétrique, on complète de façon analogue le pourtour de la grille.
Les deux cases restantes peuvent par exemple être remplies en considérant que ce sont les dernières des colonnes b et c.

2) Grille des cases imposées :

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | **1** | 2 | | |
| *B* | 3 | 4 | **2** | 1 |
| *C* | | **3** | 1 | |
| *D* | | 1 | | |

Les 3 cases pré-remplies imposent un 4 en Bb. Les cases Aa, Bb et Cb imposent un 2 en Ab.
La dernière case libre du carré ABab est Ba qui contient donc un 3..
La dernière case libre de la ligne B est Bd qui contient donc un 1.
La dernière case libre de la colonne 2 est Db qui contient donc un 1.
Les deux 1 que l'on vient de placer ne laissent qu'une case possible pour le 1 du carré CDcd, c'est la case Cc qui contient donc un 1.
A partir de là plusieurs solutions sont possibles, par exemple la réponse du 1) et les grilles :

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | **1** | 2 | *3* | *4* |
| *B* | 3 | 4 | **2** | 1 |
| *C* | *4* | **3** | 1 | *2* |
| *D* | *2* | 1 | *4* | ***3*** |

Et

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | **1** | 2 | *4* | *3* |
| *B* | 3 | 4 | **2** | 1 |
| *C* | *2* | **3** | 1 | *4* |
| *D* | *4* | 1 | *3* | ***2*** |

Ces trois solutions n'ayant aucun autre nombre en commun que ceux imposés ci-dessus, il y a donc 9 cases imposées dont les 3 de départ.

3)
Vérifions que si on retire le 4 de la grille initiale, les 3 solutions précédentes sont les seules.

Partons de la grille des cases imposées et supposons qu'il y a un 4 en Dd. La seule grille possible est la réponse du 1). Cela a été justifié à la question 1).

Supposons maintenant qu'il y a un 3 en Dd.
Les cases Bc, Cc, Dd imposent un 4 en Dc.
La dernière case libre du carré CDcd est Cd qui contient donc un 2.
La dernière case libre de la ligne D est Da qui contient donc un 2.
La dernière case libre de la colonne 3 est Ac qui contient donc un 3.
La dernière case libre de la ligne A est Ad qui contient donc un 4.
La dernière case libre de la ligne C est Ca qui contient donc un 4.
On obtient la première grille proposée à la question 2).

Supposons maintenant qu'il y a un 2 en Dd.
La situation est symétrique de la précédente et on obtient la seconde grille proposée à la question 2).

Il n'y a pas d'autre possibilité, le 1 étant proscrit en Dd à cause du 1 imposé en Cc.

Le problème est donc résolu lorsque l'on retire le 4 en Dd.

Par symétrie, le problème est identique si on retire le 1 en Aa.

Concernant le retraît du 2 ou du 3, il suffit de noter que si on permute 2 lignes ou 2 colonnes voisines sur le bord de la grille, on ne change pas le nombre de solutions car on ne modifie pas le contenu global des carrés et des autres lignes et colonnes.
En permutant les colonnes a et b ainsi que les colonnes c et d, puis les lignes A et B ainsi que les lignes C et D, on obtient :

| | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | | | | 2 |
| *B* | | 1 | | |
| *C* | | | 4 | |
| *D* | 3 | | | |

Ce qui, après rotation d'un quart de tour, montre que le retrait du 2 et le retrait du 3 se ramènent aux deux cas précédents.

Il y a donc toujours exactement 3 solutions contenant 9 cases identiques.