

Exercice 3 : les cylindres en papier

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est h , le rayon de base R et la surface de base B , la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.

Pour un cercle de rayon R , la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.

Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base a qu'on enrôlera et de hauteur b qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

$$a = 2\pi R \text{ d'où } R = \frac{a}{2\pi} \text{ puis } V = \pi \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 b \text{ soit } \boxed{V = \frac{1}{4\pi} a^2 b} .$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)

Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.

Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi} L^2 l} \text{ ou } \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l^2 L}$$

Ainsi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.

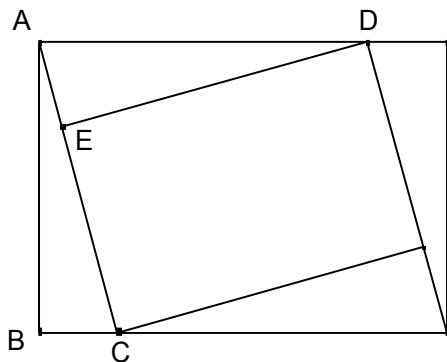
Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :

$$a = 29,7 - x = L - x \text{ et } b = 21 = l \text{ d'où } \boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi} (L-x)^2 l} .$$

Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de a et b .



Or (cf figure) :

$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles ABC et DEA sont semblables.

Il vient : $\frac{DE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ soit $\frac{b}{L-x} = \frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b = \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} (\sqrt{l^2+x^2})^2 \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l(L-x)\sqrt{l^2+x^2}} .$$

Par suite :

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi} (L-x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l(L-x)\sqrt{l^2+x^2} \\ &\Leftrightarrow (L-x) = \sqrt{l^2+x^2} \quad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi} (L-x) l \\ &\Leftrightarrow (L-x)^2 = l^2+x^2 \\ &\Leftrightarrow L^2+x^2-2Lx = l^2+x^2 \\ &\Leftrightarrow L^2-2Lx = l^2 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{L^2-l^2}{2L}} \end{aligned}$$

Numériquement on obtient $L = 29,7$ et $l = 21$: $\boxed{x \approx 7,426}$.

$$\text{soit } x \approx \frac{29,7}{4} \approx 7,425 .$$

Autrement dit il suffit de choisir pour x à peu près le quart de la longueur de la feuille.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\frac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions...

En fait, le format $21 \times 29,7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\frac{2l}{L} = \frac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

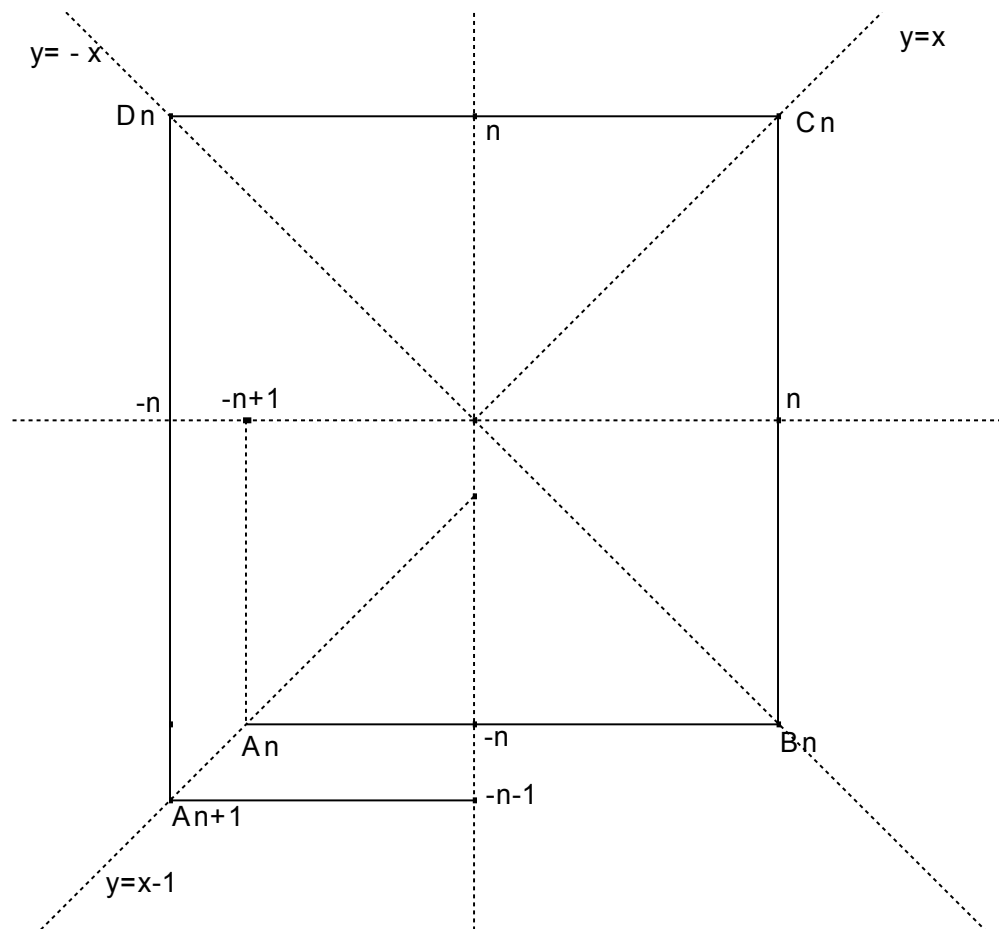
mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non $21 \times 29,7$ mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers...), l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2-l^2}{2L} = \frac{L^2-\frac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \quad \text{soit} \quad \boxed{x = \frac{L}{4}} \quad \text{sic....}$$

Exercice 2 : La « spirale »

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1, D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1$ (D_1), $y = -x$ (D_2) et $y = x$ (D_3).

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n + 1, -n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n) .

D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n - 1, 2n - 1, 2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0 .

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démonstrons-le :

$$\begin{aligned} l(A_n) &= OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \dots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \dots + (2n-2) + (2n-2) + (2n-1) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (2n-2)) + (2n-1) \\ &= 2 \cdot \frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + (2n-1) = (2n-2)(2n-1) + (2n-1) \\ &= (2n-1)((2n-2) + 1) = (2n-1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{et } l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$$

1. Il existe deux points A de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5 , l'autre d'abscisse -5 .

1^{er} cas : $A(5,0)$

Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;

en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.

$$\text{Ainsi } l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}.$$

2^{ème} cas : $A'(-5,0)$

Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.

$$\text{Ainsi } l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}.$$

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;

en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_{2006}(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.

$$\text{Ainsi } l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\,096\,145}.$$

3. On cherche ici le point C tel que $l(C) = 2006$.

Or, la suite des nombres

$$l(O) = 0, l(A_1) = 1, l(C_1) = 4, l(A_2) = 9, l(C_2) = 16, \dots,$$

$$\dots l(A_n) = (2n-1)^2, l(C_n) = (2n)^2$$

est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).

Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

$$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$

De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc

$$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$

donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

$$\text{Enfin : } 2006 - 1980 = 26 \text{ donc } \begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_C = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$$

Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22, -4)}$.

4. Soit $D(p, q)$ un point à coordonnées entières.

Éliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.

Notons $n = \max(|p|, |q|)$.

Si $n = |p|$ alors $|q| \leq n$ donc $-n \leq q \leq n$ et $p \in \{-n, n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n, q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[B_n C_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leq y_D \leq y_{C_n} = n \end{cases}$$

Si $p = -n$ alors $D(-n, q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[D_n A_{n+1}]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leq y_D \leq y_{D_n} = n \end{cases}$$

Si $n \neq |p|$ alors $|p| < |q| = \max(|p|, |q|) = n$:

par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n, n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p, n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_n D_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$$

Si $q = -n$ alors $D(p, -n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_n B_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leq x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$$

Ainsi dans tous les cas D est sur un des segments qui constituent la spirale.

Exercice 4 **Struggle for life**

Désignons par L_n , S_n et M_n le nombre de loups, de serpents et de moutons le nième jour

On a

$$L_n = M_{n-1} - S_{n-1}$$

$$M_n = M_{n-1} - L_{n-1}$$

$$S_n = S_{n-1} - M_{n-1} + L_{n-1}$$

En résolvant ce système on obtient:

$$S_{n-1} = M_n + S_n$$

$$L_{n-1} = L_n + S_n$$

$$M_{n-1} = M_n + L_n + S_n$$

Ce qui permet de faire un tableau :

jour	moutons	loups	serpents
10	1	0	0
9	1	0	1
8	2	1	2
7	5	3	4
6	12	7	9
5	28	16	21
4	65	37	49
3	151	86	114
2	351	200	265
1	816	465	616

Exercice 1 Saine lecture

Le nombre total de chiffres utilisés est $9 + 2 \times 90 + 3 \times 900$ soit 2889

Pour compter le nombre de 7 il faut compter par exemple le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des unités, le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des dizaines puis le nombre de fois où il est écrit comme chiffre des centaines.

Pour les unités on va de 007 à 997 soit **100** occurrences.

Pour les dizaines on va de 070 à 079 puis de 170 à 179 jusqu'à 970 à 979 soit $10 \times 10 = \mathbf{100}$ occurrences.

Pour les centaines de 700 à 799 soit **100** occurrences.

Ce qui fait 300 utilisations du chiffre 7

Pour l'utilisation du zéro, on peut remarquer qu'il est utilisé 99 fois en unité et 90 fois en dizaines, jamais en centaines soit **189** occurrences.

On peut vérifier en remarquant que les autres chiffres jouent le même rôle que 7

$$9 \times 300 + 189 = 2889$$

Ce qui ne prouve pas que les résultats sont justes mais au moins qu'ils sont cohérents.