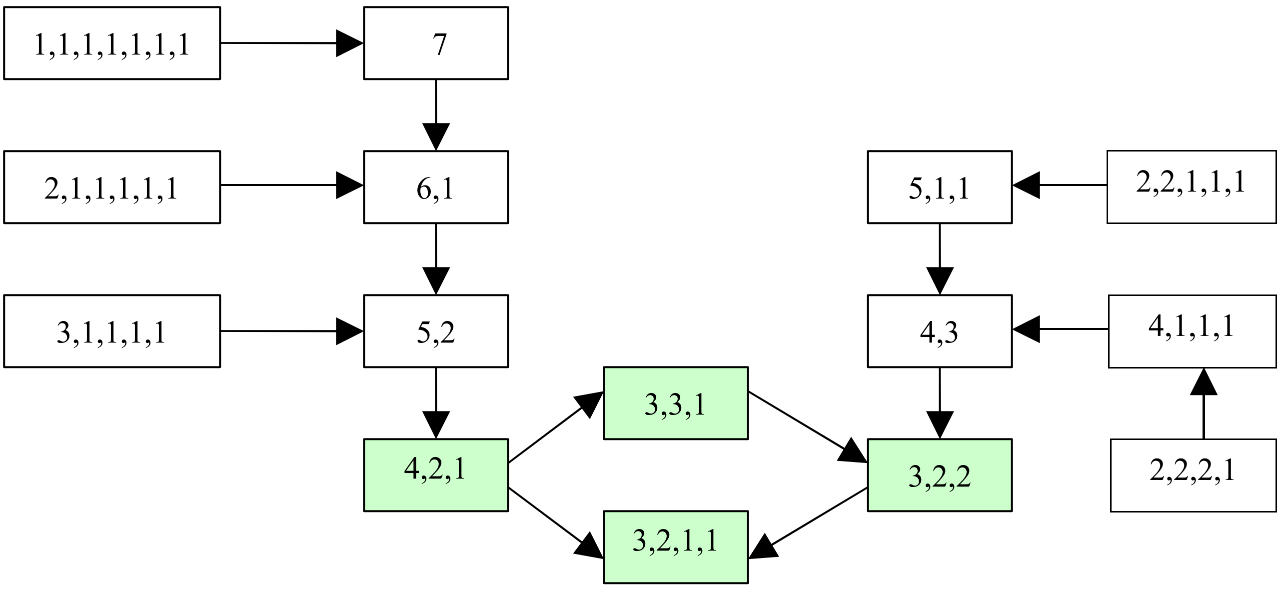
Exercice 1 :

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1

En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme $2007=501\times4+3$, après 2007 manipulations, on aura encore la répartition (4,2,1).

Questions 2 et 3

On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2

Il faut dans un premier temps travailler en projetant orthogonalement sur le plan du sol ; les centres des trois boules se projettent suivant les sommets d'un triangle équilatéral de côté 78 mm, le centre du cochonnet se projette au centre de gravité de ce triangle, la distance entre le projeté du centre du cochonnet et de celui d'une boule est donnée par $d=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 78$.

Dans un plan vertical contenant le centre d'une boule et celui du cochonnet on applique le théorème de Pythagore dans la figure formée par deux cercles tangents de rayons R et r qui ont une tangente commune où d représente la distance entre les points de tangence :

$(R+r)^2=(R-r)^2+d^2$, ce qui nous donne après calcul $r=\frac{d}{2}$ soit dans notre problème 39 mm..

Exercice 3

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Pas de solution pour le cas 1.

Dans le deuxième cas, appelons d et d' les deux droites perpendiculaires et d'' la troisième droite, et O le point d'intersection des trois droites. Prenons un point A sur d et non sur d', un des côtés est perpendiculaire à la droite d'', ce qui détermine de façon unique le deuxième sommet B sur la droite d', le triangle ABO est une solution.

Qans le troisième cas on procède comme au second, on prend un point arbitraire A différent de O sur une des trois droites d par exemple, on mène la perpendiculaire à d' qui coupe d'' en B, la perpendiculaire à d passant par B coupe d'' en C le triangle ABC est une solution du problème, parce que la droite d'' qui passe par B et par deux hauteurs du triangle ABC, est nécessairement la troisième hauteur.

Dans les deux derniers cas, il existe une infinité de solutions qui se déduisent l'une de l'autre par une homothétie de centre O.

<u>Exercice 4 :</u>

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.
Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :
$DC=AB-AD$; $MN=AB-2$
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.
On obtient avec 1) : $AB=7$, $AD=6$, $DC=1$.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).