**Classe de premières générales
et technologiques**

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Académie de Montpellier

Session 2009

Durée : 4 heures

Série L, ES et technologiques

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
La clarté de la rédaction, la qualité des raisonnements et les prises d'initiative seront prises en compte.

Exercice 1

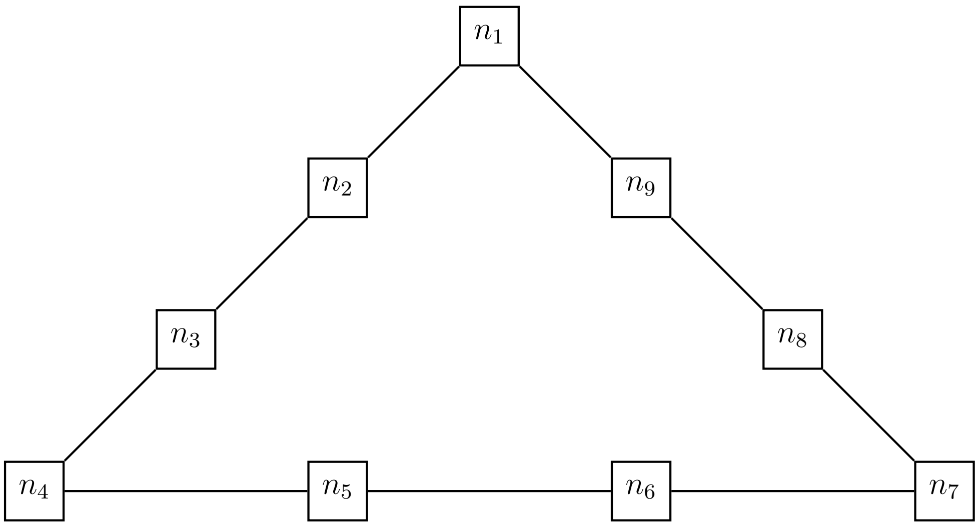
Partie A
Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B
Les triangles magiques

On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

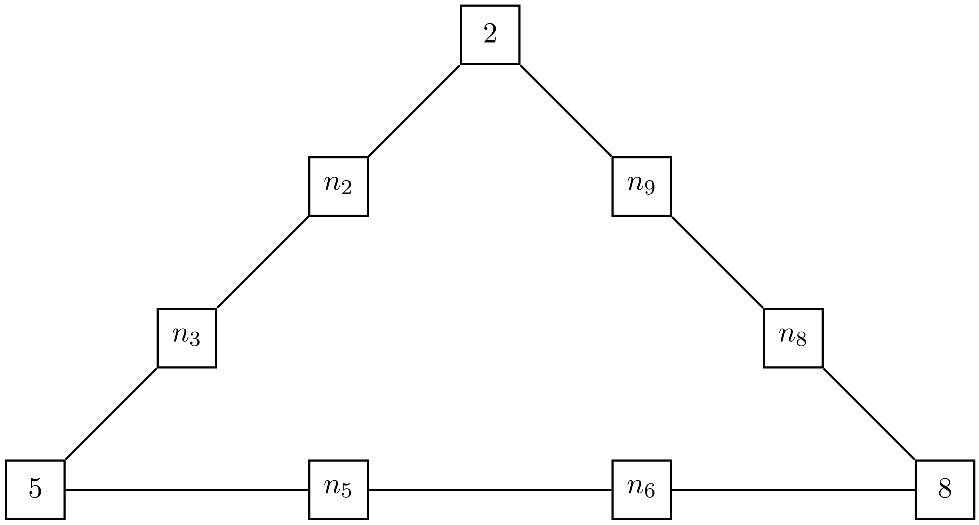


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b. En déduire qu'on a $17 \leqslant S \leqslant 23$.
   c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5. a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   b. Proposer un triangle 19-magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

   On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
   Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4. A partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3
Rugby

Au rugby, après décision de l'arbitre, les équipes marquent des points lors de trois phases de jeu :

- En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,
- En réussissant un drop pour 3 points,
- En marquant un essai qui sera soit « transformé » soit « non transformé » :
  - s'il est « transformé » il rapporte 7 points
  - s'il est « non transformé », il rapporte 5 points.

1. Eric affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais. Est-ce possible ? Justifier.
2. Bénédicte rapporte que son équipe a marqué 36 points grâce à quatre essais et plusieurs pénalités. Combien de ces essais ont été « transformés » ?
3. Une équipe à marqué 30 points, trouver toutes les manières dont ces 30 points ont pu être obtenus.
4. Quels sont les scores *impossibles* au rugby ?

Exercice 4
La pièce et l'oie

Il s'agit d'un jeu de l'oie où l'on joue avec une pièce de monnaie. On part de la case départ (case 0), on lance la pièce ; si le pile sort on avance d'une case ; si le face sort on avance de deux cases. On appelle *trajet* une séquence de la forme $(1, 1, 2, 1)$ qui résulte dans ce cas du tirage PILE/PILE/FACE/PILE (et qui fait tomber sur la case 5).

1. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5.
2. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5...
   a. qui passent par la case 4 ?
   b. qui ne passent pas par la case 4 ?
3. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 ?
4. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 en passant par la case 8.