académie MONTPELLIER

Olympiades académiques 2004

Éléments de correction

Exercice 1

Deux réels distincts u et v sont interchangeables s'il existe au moins un couple (a ; b) de réels tels que f(u) = v et f(v) = u où f est la fonction définie pour x ≥ - b par $f(x)=a-\sqrt{x+b}$

1- Pour montrer que 2 et 3 sont échangeables il faut chercher deux réels a et b tels que :

$$f(2) = a - \sqrt{2+b} = 3 \text{ et } f(3) = a - \sqrt{3+b} = 2$$

d'où la condition nécessaire : a = 3 + $\sqrt{2+b}$ = 2 + $\sqrt{3+b}$

d'où 1 = $\sqrt{3+b}$ - $\sqrt{2+b}$.

On doit chercher deux nombres dont la différence des racines carrées est égale à 1.
En prenant pour ces deux nombres 0 et 1, il vient b = -2 qui est solution de 2 + b = 0 et de 3 + b = 1. On en déduit a = 3 et f(x) = 3 - $\sqrt{x-2}$.

2- En est-il de même de 4 et 7 ? Si la réponse est oui il est nécessaire de trouver a et b tels que :

$$a - 7 = \sqrt{4+b} \text{ et } a - 4 = \sqrt{7+b}.$$

On obtient alors : $(a-4)^2-(a-7)^2=3$

ce qui implique 3(2a – 11) = 3 et a = 6. Mais dans ce cas $\sqrt{7+b}$ = a – 7 = -1 ce qui n'est pas possible. La réponse est donc négative.

Condition pour que deux entiers n et m soient échangeables.

On considère deux entiers distincts m et n avec par exemple n < m.
Par équivalence il vient successivement :

$$(1)\ \begin{cases} a-n=\sqrt{m+b} \\ a-m=\sqrt{n+b} \end{cases}$$

$$(2)\ (i)\begin{cases} (a-n)^2=m+b \\ (a-m)^2=n+b \end{cases} \textbf{ et } (ii)\begin{cases} a-n\geq 0 \\ a-m\geq 0 \end{cases} \text{ ou compte tenu de l'hypothèse } a \geq m.$$

Ensuite toujours par équivalence l'accolade (i) est remplacée par (i')
$\begin{cases} (a-n)^2=m+b \\ (a-m)^2-(a-n)^2=n+b-(b+m) \end{cases}$ ou encore par $\begin{cases} (a-n)^2=m+b \\ (n-m)(2a-n-m)=n-m \end{cases}$.

La deuxième équation donne a = $\dfrac{m+n+1}{2}$.

<u>En résumé</u> **f échange n et m si et seulement si** (compte tenu de (ii))

$$\mathbf{a} = \frac{m+n+1}{2} \quad \textbf{et } \mathbf{b = (a - n)^2 - m} \textbf{ et } \mathbf{n + 1 \geq m}$$

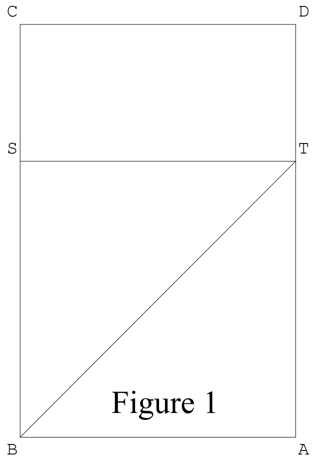
Or on a supposé que n < m, c'est donc que m = n + 1.
Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs, de plus le calcul a montré que la fonction f est unique : $f(x)=n+1-\sqrt{x-n}$ **.**

Exercice 2

Une personne ne salue pas son conjoint et salue au maximum six autres personnes.
Les personnes interrogées par Monsieur Dupond ont salué (embrassade ou poignée de main) 0,1, ... ou 6 autres personnes.
Le conjoint de la personne qui a salué 6 personnes en a salué 0 puisque les autres ont au moins salué une personne.
Le conjoint de la personne qui a salué 5 personnes en a salué 1 (celle qui en a salué 6) puisque les autres en ont au moins salué 2 (celle qui en a salué 6 et celle qui en a salué 5).
Le conjoint de la personne qui a salué 4 personnes en a salué 2 (celle qui en a salué 6 et celle qui en a salué 5) puisque les autres en ont au moins salué 3.
Madame Dupond et son mari ont donc salué trois personnes.

Exercice 3

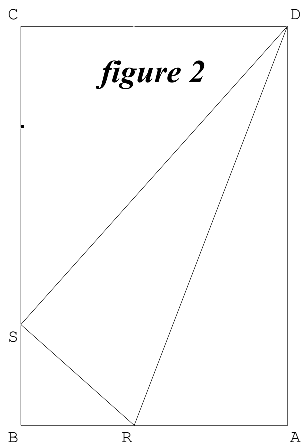
Cet exercice donnait l'opportunité de visualiser le problème en direct en découpant une feuille aux dimensions indiquées ou de dimensions proportionnelles. Il y a naturellement plusieurs façons de résoudre cet exercice , nous vous donnons celle proposée par le concepteur du sujet

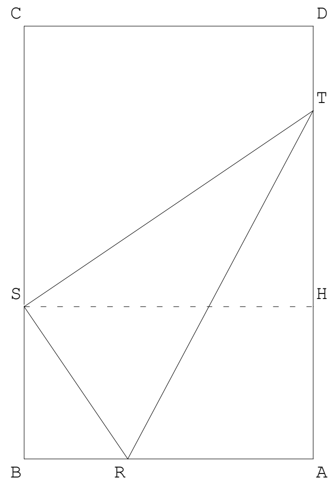


La feuille format 4×6 constitue un rectangle ABCD. On plie cette feuille de sorte que le point A coïncide avec un point S du côté]BC[. La feuille est pliée suivant le segment [RT] avec T∈ [AD] et R∈ [AB] et on pose $x = AR$ et $y = AT$.

1-Encadrement de x : ***remarque (RT) est un axe de symétrie du quadrilatère ARST.*** **Les positions extrêmes sont atteintes : x est maximal quand R est en B $(x = 4)$ et x est minimal quand T est en D (y = 6). La valeur maximale de x est x = 4 .**

Du fait de la symétrie (Figure 2) par rapport à (TR) on a DS = 6 et du triangle rectangle SCD on tire que SC² = 20. Comme CB = CS + SB = 6 on obtient que $SB = 6 - \sqrt{20}$. On a $RB = 4 - x$ et du triangle rectangle SBR on tire que $SR^2 = RB^2 + SB^2$. Du fait de la symétrie par rapport à (TR) on a $SR = RA = x$ d'où $x^2 = (4 - x)^2 + (6 - \sqrt{20})^2$ ce qui donne après simplification **pour valeur minimale de x : x = 9 - 3$\sqrt{5}$.**





2- Relation entre *x* et *y* lorsque S se déplace sur [BC] :

On désigne par H (Figure 3) le projeté orthogonal de S sur [AD].

On sait que :

SR = AR

BR = 4 - x

D'où SB = $2\sqrt{2x-4}$

et comme AH = BS alors

HT = AT – AH= y - SB = y - $2\sqrt{2x-4}$.

On sait aussi que TS =TA = y et SH = BA = 4 et donc dans le triangle SHT rectangle en H on a : $y^2 = 4^2 + (y - 2\sqrt{2x-4})^2$

ce qui donne après développement, réduction et simplification

y = $\dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}}$

3- Valeur de *x* pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale et nature du triangle AST

On désigne par S(x) l'aire de la partie repliée qui correspond au triangle rectangle RAT et on a S (x) = $\frac{1}{2}$ AR × AT = $\frac{1}{2}$ xy. D'où en utilisant la valeur de y ci-dessus on obtient

$$S(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}.$$

La dérivée de S(x) est $$S'(x)=\frac{2x\sqrt{2x-4}-x^2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}}\times 2}{2x-4}=\frac{2x(2x-4)-x^2}{(2x-4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x(3x-8)}{(2x-4)^{\frac{3}{2}}}$$

qui a sur l'intervalle de définition de x le même signe que 3x – 8.

Ceci permet en utilisant le tableau de variation de S de voir que S admet un minimum en et de conclure que l'aire minimale vaut unités d'aire.

Le triangle AST est évidemment équilatéral.

Exercice 4

L'aire d'un triangle MPQ est donnée par MP.MQ sin M

L'idée est donc de trouver un point J sur le segment [BC] tel que CI.CJ = ½ CA.CB ou un point P sur le segment [AB] (différent du milieu de [AB]) tel que AP.AI = ½ AB.AC.

On appelle O le milieu de [AC].

Si I est sur le segment [OA], on mène par A la parallèle à (BI) qui coupe (BC) en K, (le point K est sur la demi droite [CB) avec CK<2 CB) d'après le théorème de Thalès on a CI/CA=CB/CK , c'est à dire CI.CK= CA.CB. Si on appelle J le milieu de [CK], il appartient à [CB] et on a CI.CJ= ½ CA.CB.

Si I est sur le segment [OC], on mène par C la parallèle à (BI) qui coupe (AB) en L (avec L qui appartient à [AB), différent de B tel que AL< 2AB) d'après le théorème de Thalès on a AI/AC = AB/AL c'est à dire AI.AL = AC.AB ; si on appelle P le milieu de [AL] il appartient au segment [AB] et on a AI AP = ½ AC.AB, la droite (PI) coupe (BC) sauf dans le cas où le point I est tel que

$$\frac{AI}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$