Olympiades académiques 2005

Sujets et éléments de correction

Exercice 1

On considère l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. On définit l'opération collage de deux nombres entiers M et N par M*N = MN.

Ainsi 6*4 = 64
35*2 = 352
17*35 = 1735.

Un entier N est formidable si N divise M*N pour tout entier M.
2 est formidable !
3 est-il formidable ?
Combien y a-t-il de nombres formidables à un chiffre ?
Combien y a-t-il de nombres formidables inférieurs à 2005 ?

Corrigé

2 est formidable puisque M*N se termine par 2 et est donc toujours divisible par 2.
3 ne l'est pas puisque 3 ne divise pas 13.
On remarque que 1, 2 et 5 sont formidables et que les autres ne le sont pas
Pour les nombres à deux chiffres on peut écrire M*N = 100M+N.
Pour que N divise 100M+N, il faut que N divise 100 (obtenu pour M=1) cette condition est visiblement suffisante.
Pour les nombres à trois chiffres, il faut et il suffit que N divise 1000.
Pour les nombres à quatre chiffres il faut et il suffit que N divise 10000.
D'où la liste : 1,2,5,10,20,25,50,100,125,200,250,500,1000,1250,2000
15 nombres formidables inférieurs à 2005.

Exercice 3

On considère trois nombres positifs a, b et c tels que a + b + c = 1.
Pour quelles valeurs de a, b et c la somme ab + ac est-elle maximum ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

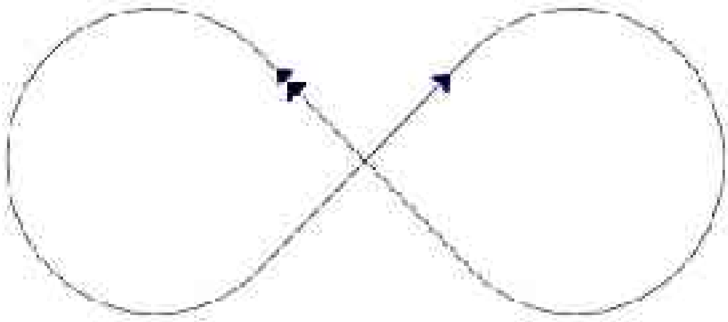
On considère quatre nombres positifs a, b, c et d tels que a + b + c + d = 1.
Pour quelles valeurs de a, b, c et d la somme ab + ac + ad est-elle maximum ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

Eléments de correction

Eléments de correction
ab+ac = a(b+c) = a(1-a).
L'étude de la fonction qui a x associe x(1-x) montre qu'elle admet un maximum sur R
pour x = ½.
On peut aussi tester des valeurs et montrer une fois que ½ apparaît comme le « bon candidat » que $½-a+a^2$ est positif ou nul.
Le maximum est donc ¼ obtenu pour a=1/2 et b+c=1/2.
De même ab+ac+ad= a(b+c+d)
le même raisonnement conduit à a=1/2 et b+c+d=1/2.

Exercice 2 : Le lièvre et la tortue (candidats toutes séries)

La piste du champiodrome a la forme ci-contre : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, en empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

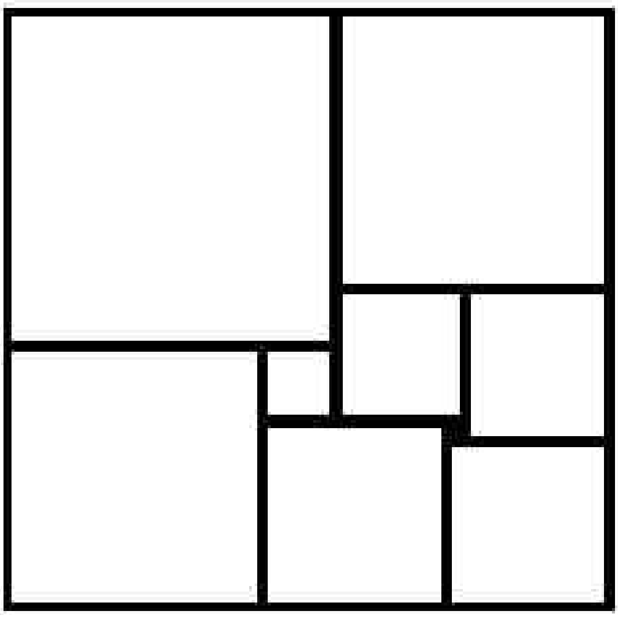
Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour), hormis le départ, le lièvre abandonne.
Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour?

Éléments de solution

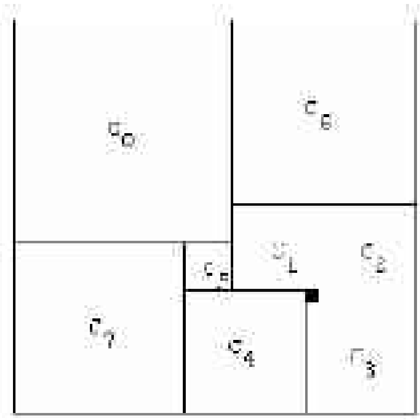
Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ». Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.
$2005=11\times182+3$
Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

Exercice 1 : un pavage (candidats toutes séries)

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité. Quelles sont les dimensions du rectangle?



Éléments de solution



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).
Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2.**
Le carré C_4 a pour côté **c + 3.**
(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)
Ceci permet de déduire que le carré C_5 pour côté **4.** Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1.**
On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :
(**2c + 1**) + (**c + 1**) + (**c + 2**) = **4c + 4.**
Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4** = **c + 7.** Donc l'autre dimension du rectangle initial est :
(**c + 7**) + (**c + 3**) + (**c + 2**) = **3c +12.**
Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11.**
Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :
4c + 4 et (**c + 7**) + (**c + 11**) = **2c + 18**
Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7.**
En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u.**