CLASSES DE PREMIERES GENERALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES
Académie de MONTPELLIER
Session 2008

Durée : 4 heures

Série S

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.

Les calculatrices sont autorisées.

La rédaction et la qualité des raisonnements ainsi que la prise d'initiatives seront prises en compte.

Exercice 1 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

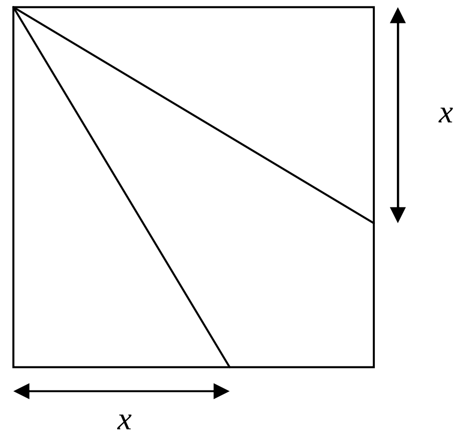
$2 = 1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

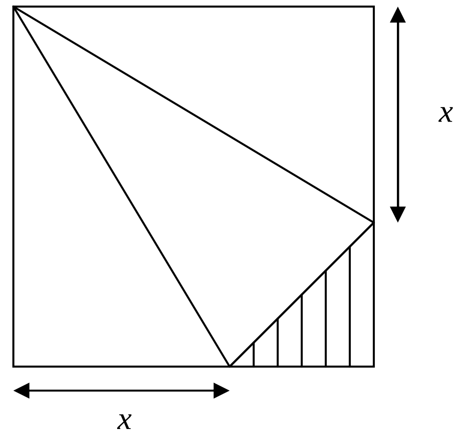
Remarque : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990*.

Exercice 2 : Un partage équitable



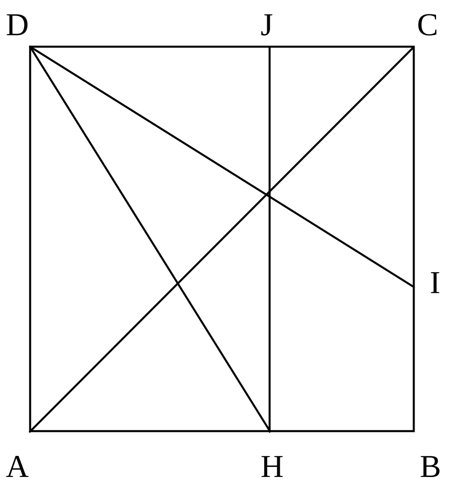
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Exercice 3 : 2008 dans tous ses états

On construit une suite de nombres rangés dans un ordre croissant, constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.
Le premier nombre est ainsi 0 qui est de rang 1, le deuxième est 2 qui est de rang 2, le troisième est 8 qui est de rang 3 et ainsi de suite.

Le tableau suivant donne les dix premiers éléments de cette suite :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	0	2	8	20	22	28	80	82	88	200

1. Quel est le plus grand nombre qui s'écrit avec exactement un 0, un 2, et un 8 ? Préciser son rang.
2. Quel est le rang, en fonction de l'entier naturel non nul *n*, du nombre qui s'écrit avec *n* chiffres 8 ?
3. Déterminer le rang du nombre 2008.
4. Comment s'écrit le nombre qui est de rang 2008 ? Justifier.

Exercice 4 : Quadrisection

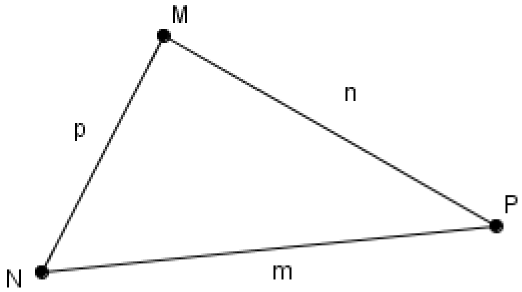
1. Construire un triangle rectangle ABC tel que la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A partagent, dans cet ordre, l'angle de sommet A en quatre angles de même mesure. Vous préciserez les mesures des trois angles du triangle.

2. Prouver qu'un triangle ayant un de ses angles partagé en 4 angles de même mesure par la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet de cet angle, dans cet ordre, est obligatoirement rectangle.

On rappelle les formules suivantes :

$$\mathit{Aire}(\mathrm{MNP}) = \frac{1}{2}\mathrm{mn}\sin(\hat{\mathrm{P}})$$

avec $\mathrm{m} = \mathrm{PN}$, $\mathrm{n} = \mathrm{PM}$ et $\hat{\mathrm{P}} = \widehat{\mathrm{MPN}}$



$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ a = \pi - b + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$