Indications de solutions pour les olympiades académiques 2001

lundi 4 février 2008
par Benjamin Clerc [spip.php?auteur1]
popularité : 5%

Exercice 1
Le total le plus petit est obtenu en alternant des 1 et des 2, les 2 apparaissant après un nombre impair de mouvements

Soit 1 + 2 + 1 + 2 +...+ 2 + 1 + 2 = 3003

Le total le plus grand est obtenu en alternant des 4 et des 3 en commençant par un 4

Soit 1 + 4 + 3 + 4 +...+ 4 + 3 + 4 = 7005

On peut toujours ajouter 1 au total d'une série qui ne contient pas que des 3 et des 4 ce qui prouve que tous les totaux intermédiaires peuvent être atteints.

Exercice 2
On peut travailler sur les aires des triangles MAB , MAC et MAD . Si H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), en posant $MH=h$ les aires valent respectivement $\frac{1}{2}h$, h , et $\frac{1}{2}dh$. Par ailleurs dans le triangle MAB l'aire est égale Ã $\frac{1}{2}MA.MB.sina$, dans le triangle MAC l'aire est égale à $\frac{1}{2}MB.MC.sina$, dans le triangle MCD l'aire est égale à $\frac{1}{2}MC.MD.sina$. On prend un repère orthonormé d'origine A , l'axe des x étant la droite (AB), les coordonnées des différents points sont alors $A(0,0)$; $B(0,1)$; $C(0,3)$; $D(0,3+d)$, $M(x,y)$

On a $\frac{1}{2}MA.MBsina=\frac{1}{2}h$

$\frac{1}{2}MB.MC.sina=h$

$\frac{1}{2}MC.MD.sina=\frac{1}{2}dh$

on en tire $MA=2MC$

soit $(x+1)^2+y^2=4$

et $d.MB=2MD$

soit $d^2((x-1)^2+y^2)=4(x-3-d)^2+4y^2$ ce qui donne après calcul pour $d \neq 2$ le cercle d'équation

$\left[x-\dfrac{d-6}{d-2}\right]^2+y^2$ = $\dfrac{4d^2}{(d-2)^2}$ et pour $d=2$ la droite $x=3$.

Pour $d=4$ les cercles sont concentriques, si $d \neq 4$, l'élimination de x^2+y^2, conduit Ã $x=\dfrac{6}{(4-d)}$

Et en reportant dans l'équation $(x+1)^2+y^2=4$, on voit que le système admet deux solutions (symétriques par rapport à (AB)) pour $d>6$, pas de solutions pour $d<6$. Pour $d=6$ les deux cercles sont tangents en un point situé sur la droite (AB) ;

Exercice3

Pour tout x réel positif $(x(f(x))$ est invariant par f, il existe donc au moins un réel a invariant ; si a est invariant on montre en utilisant la formule qu'il en est de même de l'inverse de a et des puissances successives de a. Si a est différent de 1 et invariant, une des deux suites a^n ou $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ tend vers l'infini et la limite de f en plus l'infini ne peut pas être nulle, ce qui montre que seul 1 est invariant et que pour tout x,

$xf(x)=1$ et donc que $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Exercice 4

Appelons les six sommets du cube autres que A et B par les numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6. De même les six sommets autres que A et B du cube C' par 1', 2', 3', 4', 5' , 6' les points 1, 3, 5 et 1', 3', 5' sont sur un même cercle d'axe (AB), les points 2, 4, 6 et 2', 4', 6' sont sur un cercle égal et d'axe (AB). Quand on projette la figure formée par C et C' sur un plan perpendiculaire à (AB), les six sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 se projettent suivant un hexagone régulier, de même que les six sommets 1', 2', 3', 4', 5', 6' (les projections étant rangées dans l'ordre 1, 1', 2, 2'...) ; les projections des deux segments [1,1'] et [6',2] sont parallèles or ces segments sont dans des plans parallèles au plan de projection ils sont donc aussi parallèles, les quatre points sont donc coplanaires ce qui prouve que l'arête [1,2] coupe l'arête [1'6'] elles se coupent en un point a, de même on obtient les points b, c, d, e, f. Les longueurs des segments $a1, b2, c3, d4, e5$ et $f6$ sont Ã©gales car les longueurs des segments projetés sont les mêmes et que ces arêtes du cube C font le même angle avec le plan de projection.

Soit L la longueur de l'arête de C, posons $x=a_1$, on a $x=a1\ =b2\ =c3\ =d4\ =e5\ =f6$

et $L-x=a2\ =b3\ =c4\ =d5\ =e6$.

Pour obtenir le volume de $C \cap C'$, il faut enlever au volume $V=L^3$ de C, celui de six tétraèdres isométriques $Aaf1$, $Abc3$, $Ade5$, $Bab2$, $Bcd4$ et $Bef6$ (chacun a trois faces triangles rectangles de sommet 1,2,3,4,5 ou 6)

Chacun d'eux a pour volume $\frac{1}{6}.x(L-x)L$, le volume de $C \cap C'$ est alors

|||

Le minimum cherché est atteint pour $x = \frac{L}{2}$, il est égal à $\frac{3V}{4}$ et dans ce cas les six points a, b, c, d, e, f sont coplanaires et forment un hexagone régulier.