Académie de Montpellier et Maroc

Olympiades de mathématiques

Classes de première des

Séries NON S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants et six pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Toute initiative, même infructueuse, pourra également être prise en compte.

Exercice 1 (national) : LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

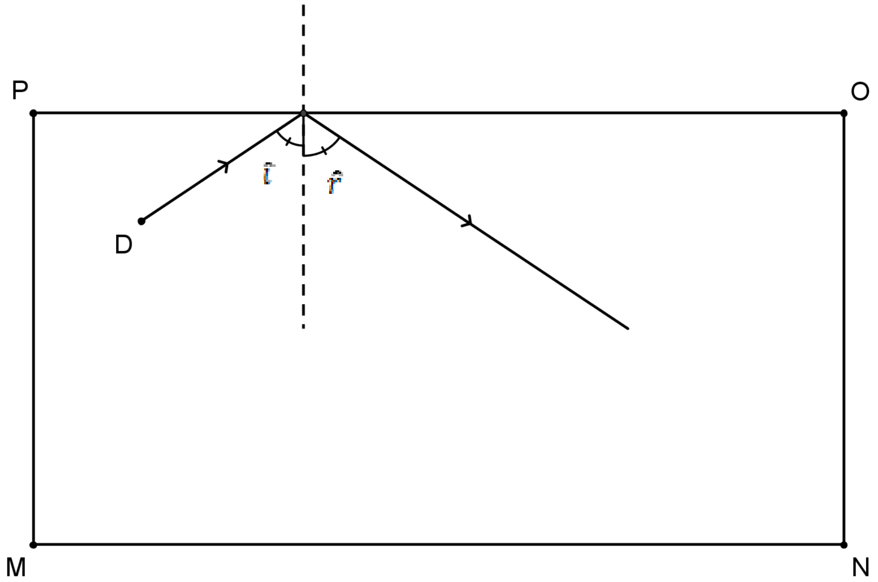
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.

En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 (national) : Le billard rectangulaire.

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{i} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

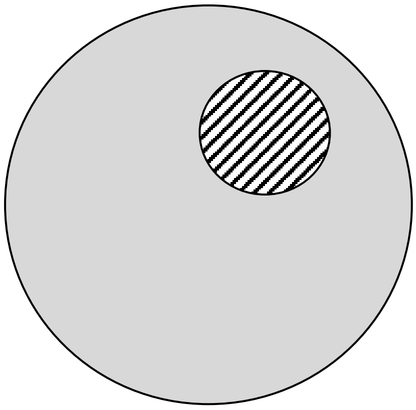
   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

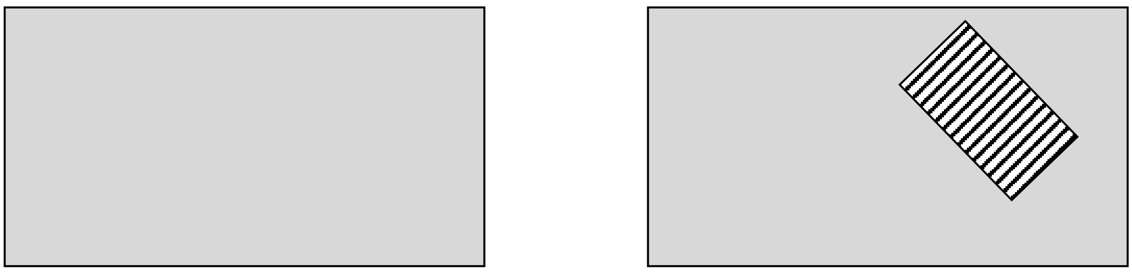
Exercice 3 (académique) : Le gâteau troué.

On justifiera clairement les solutions trouvées…

1. Trois personnes veulent se partager un gâteau en forme de disque. La première personne se taille une part circulaire comme elle l'entend et laisse un trou (zone hachurée) comme indiqué sur le dessin.
   Les deux personnes restantes veulent se partager ce qui reste du gâteau en deux parties égales. Comment réaliser cette construction avec une règle et un couteau (qui sert de crayon) ?



2. On reprend la même question avec un gâteau rectangulaire comme à gauche du dessin ci-dessous. La première personne se taille une part rectangulaire comme elle l'entend et laisse un trou (zone hachurée) comme indiqué à droite du dessin. Les deux personnes restantes veulent se partager ce qui reste du gâteau en deux parties égales. Comment réaliser cette construction avec une règle et un couteau (qui sert de crayon) ?



3. Généralisation : pour quel type de quadrilatères la solution de la seconde question se généralise-t-elle immédiatement ?

4. Mon pâtissier m'a vendu un gâteau qui a la forme d'un quadrilatère sans axe de symétrie, et qui n'est pas un trapèze.

   a. Nous sommes quatre à le manger et il m'a dit que je pouvais facilement le découper en quatre parts triangulaires de même aire. Saurez-vous dessiner un tel gâteau ?

   b. Même question en demandant que les parts soient vraiment des triangles superposables.

Exercice 4 (académique) : Embouteillages.

Les embouteillages sur une route sont en général dus à des différences de vitesse entre les véhicules et au nombre de véhicules circulant.
On se place sur une route avec une seule file de véhicules qui se suivent.
Les vitesses sont exprimées en kilomètres par heure (km.h^{-1}) ou en mètres par seconde (m.s^{-1}), les distances en kilomètres (km) ou en mètres (m) suivant les cas.

1. Distance d'arrêt.
Lorsqu'un véhicule freine sur route sèche, il lui faut une certaine distance pour s'arrêter. Cette distance d'arrêt, exprimée en m, est proportionnelle au carré de sa vitesse v, exprimée en m.s^{-1}, c'est-à-dire que : $d_A = C \times v^2$ où C désigne un nombre réel.

a. Compléter le tableau suivant :

v (en km/h)	v (en m/s)	d_A (en m)	d_A/v^2
50	13,9	12,1	0,0627
90		39,1	
100		48,3	
130		81	
150		108,4	
170		139,9	

(Source : Gendarmerie Nationale)

b. Donner une valeur moyenne de C à 10^{-2} près.

2. Distance de réaction.
Un conducteur ne réagit en général pas tout de suite à l'allumage des feux « STOP » du conducteur qui le précède : le temps de réaction noté T dépend de l'âge du conducteur, mais on considère qu'une durée moyenne d'une seconde est raisonnable.
Justifiez que la distance parcourue, exprimée en m, pendant cette seconde est :

$d_R = v$, si v est exprimée en m.s^{-1},

$d_R = \dfrac{10v}{36} \approx 0,277v$, si v est exprimée en km.h^{-1}.

3. Les véhicules.
On considère que, sur la route, il y a 80 % de véhicules légers d'une longueur moyenne de 4,50 m et 20 % de camions d'une longueur moyenne de 12 m.
Quelle est la longueur moyenne L d'un véhicule ?

4. Le débit routier.
Quand on fait couler de l'eau d'un robinet, le débit D du robinet est la quantité de liquide écoulée par unité de temps ; le débit est donc lié à la vitesse d'écoulement.
On désire exprimer le débit routier en tenant compte des éléments précédents ; pour cela, on suppose que les véhicules circulant sur la route forment un train continu roulant à la vitesse v, exprimée en m.s^{-1} et que les conducteurs respectent exactement les distances d'arrêt et de réaction avec le véhicule précédent.
On veut exprimer le débit routier en nombre de véhicules par heure.
a. Montrer que, si la vitesse est exprimée en m.s^{-1}, le débit est donné par la formule

$$D(v) = \frac{3600v}{0,06v^2 + v + 6}.$$

b. Étudier les variations de D en fonction de v.
c. Montrer qu'il existe une vitesse $v_{\max}$ pour laquelle le débit est maximum ; préciser ce débit maximum.
On donnera les résultats en $m.s^{-1}$ puis en $km.h^{-1}$ pour la vitesse et en véhicules par heure pour le débit.

5. Sur autoroute.

Vous souhaitez réguler le trafic sur l'A6 entre Valence et Montélimar dans la vallée du Rhône un jour de départ en vacances. Vous savez que le débit maximal de cette portion d'autoroute à trois voies est de 3900 véhicules par heure.
Quelle vitesse conseillée allez-vous afficher sur les panneaux d'information à destination des conducteurs ?