Académie de Montpellier et Maroc

Olympiades de mathématiques

Classes de première des

Séries S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants et six pages numérotées de 1 à 6.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Toute initiative, même infructueuse, pourra également être prise en compte.

Exercice 1 : L'argent de poche.

Au cours d'un repas, Camille revendique une augmentation de son argent de poche auprès de ses parents. Son père, un peu excédé et amusé à la fois, lui répond : « Tu auras une augmentation de ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives sur les trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. »

Camille sait que son père joue mieux que sa mère. De plus, l'étude des résultats des matchs précédents lui permet d'affirmer que la probabilité de vaincre son père est un nombre *a* et que celle de vaincre sa mère est *b*.

Quelle doit être la stratégie de Camille : jouer d'abord contre son père ou contre sa mère ?

Exercice 2 :

Le nombre *a* est un réel strictement positif et C_a désigne la parabole d'équation $y = -a\left(x^2 - 1\right)$. Les points $\mathrm{A}\left(-1;0\right)$ et $\mathrm{B}\left(1;0\right)$ sont les points d'intersection de la parabole C_a et de l'axe des abscisses.

1. On cherche à déterminer l'existence de points M de la parabole C_a tels que le triangle MAB soit rectangle en M.

   a) Montrer que si $a = 2$, il existe deux points M de la parabole C_a répondant à la question. Faire une figure et déterminer, en la justifiant, une mesure des angles aigus des triangles rectangles obtenus.

   b) Pour quelles valeurs du réel *a* existent-ils deux points M de la parabole C_a tels que le triangle MAB soit rectangle en M ?

2. Comment choisir le réel *a* pour qu'il existe un point M de la parabole C_a tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$ radians.

3. Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

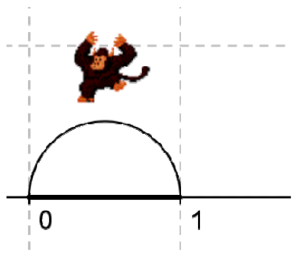
   Déterminer en fonction de α le réel *a* pour qu'il existe au moins un point M de la parabole C_a tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure α radians. Que peut-on dire lorsque α tend vers 0 ?

Exercice 3 (national) : Le singe sauteur.

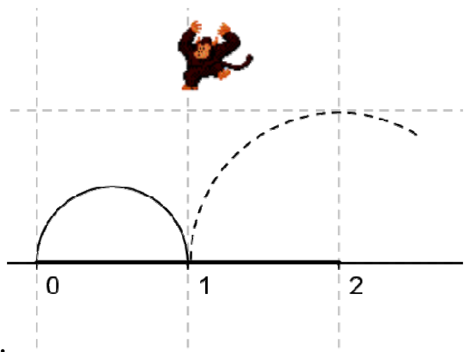
J’ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d’aller vers l’avant ou vers l’arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l’**origine** (position d’abscisse 0), atteindre la position d’abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

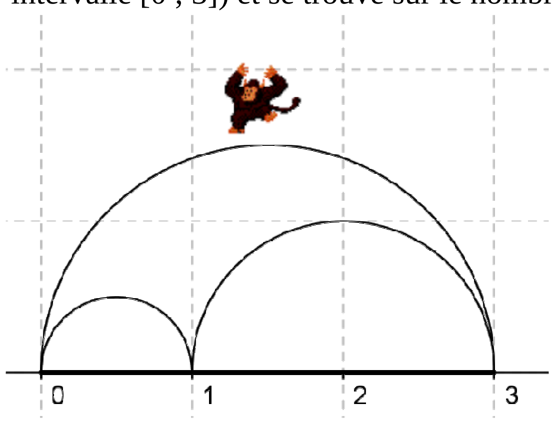
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l’est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu’il est obligé de faire vers l’avant), s’il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l’intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n’est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l’avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l’arrière (sinon il sort de l’intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d’une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n’est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 est atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice 4 (national) : Les essuie-glaces.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

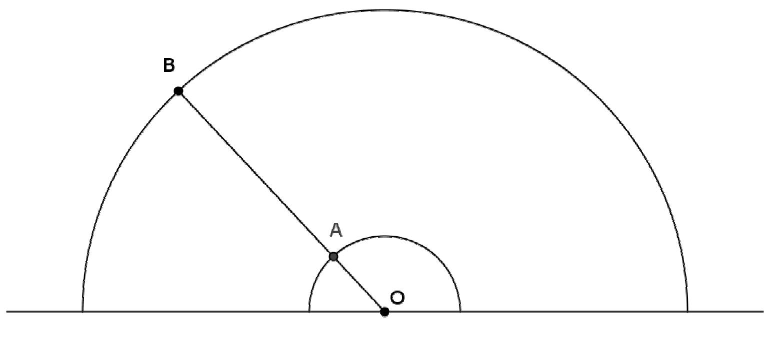


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-après). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

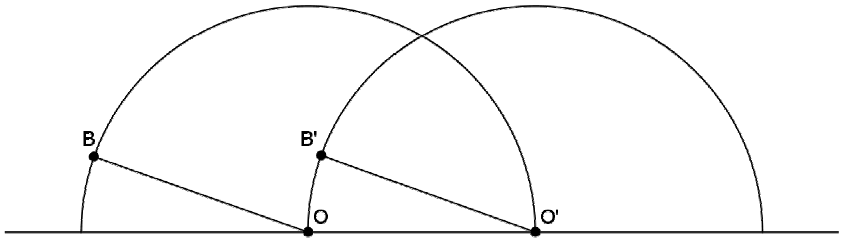


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que l'angle OCA mesure 30°, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

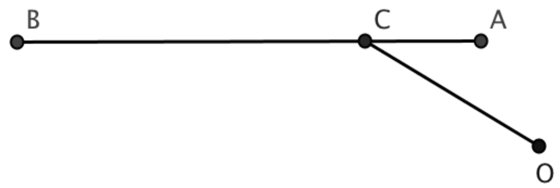


Fig. 3

   a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
   b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

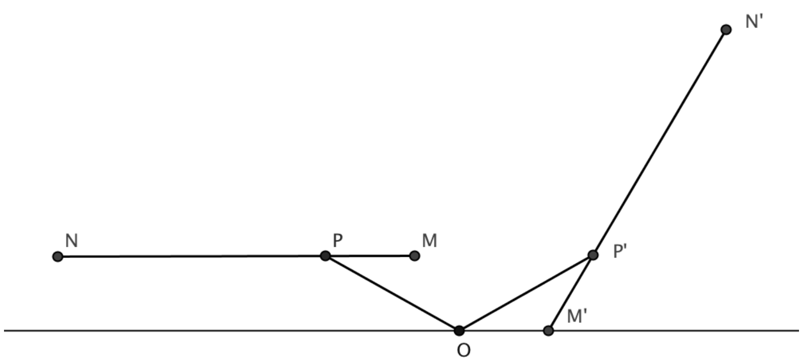


Fig. 4