

**OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES  
SESSION 2004**

**ACADEMIE DE MONTPELLIER**

**CLASSE DE PREMIERE**

**DUREE : 4 heures**

*Les quatre exercices sont indépendants  
Les calculatrices sont autorisées*

**EXERCICE 1**

On définit pour chaque couple de réels  $(a, b)$  la fonction  $f$  par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels  $u$  et  $v$  distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels  $(a, b)$  tel que la fonction  $f$  vérifie à la fois  $f(u) = v$  et  $f(v) = u$ .

- 1- Montrer que 2 et 3 sont interchangeable.
- 2- Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
- 3- A quelle condition deux entiers  $u$  et  $v$  sont-ils échangeables ?

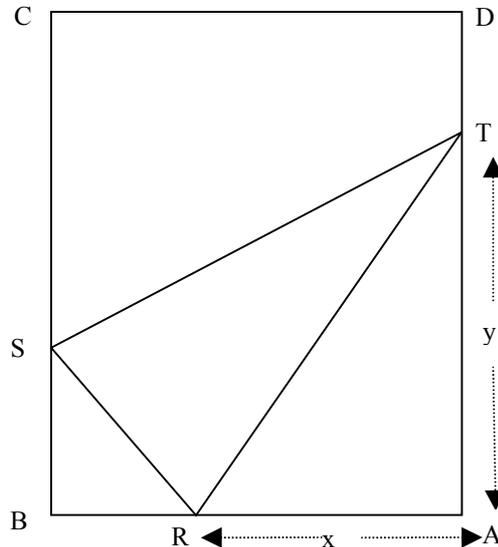
**EXERCICE 2**

Quatre couples se retrouvent chez M et Mme Dupond ; embrassades et poignées de mains sont échangées sauf bien sûr entre les époux. M Dupond demande à chacun ainsi qu'à sa femme combien il (ou elle) a serré de mains et il obtient sept réponses différentes.

Combien Mme Dupond a-t-elle serré de mains ?

### EXERCICE 3

Soit  $ABCD$  une feuille de papier rectangulaire de largeur  $AB = 4$  et de longueur  $BC = 6$ . Soit  $R$  un point de  $[AB]$  (bord inférieur de la feuille) et  $T$  un point de  $[AD]$  (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment  $[RT]$  et on appelle  $S$  la nouvelle position du point  $A$  (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-dessous :



Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où  $S$  est sur le segment  $[BC]$  (bord gauche de la feuille).

On pose  $AR = x$ ,  $AT = y$

- 1- Trouver les valeurs minimale et maximale de  $x$
- 2- Trouver une relation entre  $x$  et  $y$  lorsque  $S$  se déplace sur  $[BC]$
- 3- Trouver la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle  $SRT$ ) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle  $AST$  ?

### EXERCICE 4

$ABC$  est un triangle quelconque.

$I$  est un point du segment  $[AC]$ .

Déterminer puis construire le ou les points  $J$  de  $(BC)$  tels que la droite  $(IJ)$  partage le triangle en deux parties de même aire.