MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

RÉGION ACADÉMIQUE OCCITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades de mathématiques 2019

Mercredi 13 mars 2019 de 10h10 à 12h10

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices :**

- **Les candidats de la série S** traitent les exercices numéro 1 (*Algorithme linéaire*) et numéro 2 (*Suites des entiers dont la somme est divisible par d*)

- **Les autres candidats** traitent les exercices numéro 1 (*Algorithme linéaire*) et numéro 3 (*Fibonacci en musique*)

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Algorithme linéaire

Les deux parties suivantes peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : algorithme linéaire à deux variables

Un algorithme sera dit *linéaire à 2 variables* (on dira simplement *linéaire*) s'il utilise deux variables X_1 et X_2 et qu'il autorise les instructions :

- $X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
- $X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$
- de la forme : $X_1 \longleftarrow a \times X_1$ où a est un nombre réel quelconque ;
- de la forme : $X_2 \longleftarrow a \times X_2$ où a est un nombre réel quelconque.

La flèche « $\longleftarrow$ » symbolisant l'expression « prend la valeur ».

Par exemple, l'algorithme suivant est linéaire :

Algorithme 1
$X_1 \longleftarrow 2 \times X_1$
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
$X_1 \longleftarrow 5 \times X_1$
$X_2 \longleftarrow -1 \times X_2$
$X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$

1. Dans cette question, on s'intéresse à l'algorithme 1 donné ci-dessus. On notera x_1 et x_2 les valeurs respectives des variables X_1 et X_2 au départ de l'algorithme et on notera $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ les valeurs respectives de X_1 et X_2 obtenues à la fin de l'algorithme.
   - **a.** Justifier que si $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$ alors $x_1^{'} = 35$ et $x_2^{'} = 34$.
   - **b.** Exprimer $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ en fonction de x_1 et x_2.
   - **c.** Combien valent x_1 et x_2 pour qu'à la fin de l'algorithme 1 on obtienne $x_1^{'} = 20$ et $x_2^{'} = 18$?

   On dit que u' et v' s'obtiennent *linéairement* en fonction de u et v s'il existe quatre nombres réels a, b, c, d tels que $\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}$.

   - **d.** $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ s'obtiennent-il linéairement en fonction de x_1 et x_2?

2. Dans cette question, on s'intéresse à l'algorithme 2 donné ci-dessous :

   Algorithme 2
   $X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
   $X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$
   $X_1 \longleftarrow -1 \times X_1$
   $X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
   $X_1 \longleftarrow -2 \times X_1$
   $X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$
   $X_1 \longleftarrow -0{,}5 \times X_1$

   - **a.** Quel est le rôle de l'algorithme 2 ?
   - **b.** En reprenant les notations de la question **1**, $x_1^{'}$ et $x_2^{'}$ s'obtiennent-il linéairement en fonction de x_1 et x_2 par l'algorithme 2 ?

c. En déduire un algorithme linéaire qui permet d'obtenir $\begin{cases} x_1' = b\,x_2 \\ x_2' = c\,x_1 \end{cases}$ pour tous réels b et c donnés.

3. L'objectif de cette question **3** est de démontrer que, pour tous réels a, b, c et d donnés, il existe un algorithme linéaire à deux variables X_1 et X_2 tel que si x_1 et x_2 sont les valeurs respectives de X_1 et X_2 avant le début de cet algorithme, alors les valeurs respectives x'_1 et x'_2 de X_1 et X_2 après son exécution vérifient :

$$\begin{cases} x_1' = a\,x_1 + b\,x_2 \\ x_2' = c\,x_1 + d\,x_2 \end{cases}$$

a. Cas où a, b et c sont non nuls (et d quelconque). Quelles valeurs faut-il donner aux réels α et β pour que les valeurs de la fin de l'algorithme 3 donné ci-dessous soient $\begin{cases} x_1' = a\,x_1 + b\,x_2 \\ x_2' = c\,x_1 + d\,x_2 \end{cases}$ lorsque x_1 et x_2 sont les valeurs de X_1 et X_2 avant son exécution ?

<u>Algorithme 3</u>
$X_1 \longleftarrow a \times X_1$
$X_2 \longleftarrow b \times X_2$
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
$X_2 \longleftarrow \alpha \times X_2$
$X_2 \longleftarrow X_1 + X_2$
$X_2 \longleftarrow \beta \times X_2$

b. Conclure en envisageant tous les cas restant à traiter.

Partie B : algorithme linéaire à trois variables

Un algorithme sera dit *linéaire à 3 variables* (on dira simplement *linéaire*) s'il utilise trois variables X_1, X_2, X_3 et qu'il autorise les instructions de la forme :

- $X_i \longleftarrow X_i + X_j$ où les indices i et j sont des entiers distincts parmi les entiers $1, 2$ et 3.
- $X_i \longleftarrow a \times X_i$ où a est un nombre réel quelconque et l'indice i est un entier parmi les entiers $1, 2$ et 3.

Par exemple, l'algorithme suivant est linéaire :

<u>Algorithme 4</u>
$X_1 \longleftarrow 0 \times X_1$
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_2$
$X_1 \longleftarrow X_1 + X_3$

1. Justifier que les trois instructions de l'algorithme 4 conduisent à la seule instruction $X_1 \longleftarrow X_2 + X_3$ (les autres variables X_2 et X_3 n'ont pas changé leurs valeurs).

Pour la suite, on admet que dans un algorithme linéaire, on peut accepter plus généralement les instructions de la forme $X_i \longleftarrow X_j + X_k$ où les indices i, j et k sont des entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

2. Justifier qu'on peut également accepter les instructions de la forme $X_i \longleftarrow a \times X_j$ (sans modifier les valeurs des autres variables) où les entiers i et j sont des entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

3. Même question avec l'instruction de la forme $X_i \longleftarrow X_j - X_k$ où les indices i, j et k sont des entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, avec j et k distincts.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Suites des entiers dont la somme est divisible par d

Pour tout entier naturel X, on note $\sigma(X)$ la somme de ses chiffres.

Exemples : $\sigma(1\,304)=1+3+0+4=8$

$\sigma(13\,041)=8+1=9$

$\sigma(130\,418)=9+8=17$

Partie A

On s'intéresse à la suite u de tous les entiers strictement positifs dont la somme des chiffres est divisible par 3.
Par exemple, le nombre $12\,345$ est un terme de la suite u car $\sigma(12345)=1+2+3+4+5=15$, et 15 est divisible par 3.

1. Donner la liste des 8 premiers termes de cette suite.
2. On note $\overline{abc}$ le nombre entier composé de a centaines, b dizaines et c unités.
   Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 3 si, et seulement si, $a+b+c$ est divisible par 3.

On peut démontrer de même, et on l'admettra ici, que pour tout entier positif n, n est divisible par 3 si, et seulement si, $\sigma(n)$ est divisible par 3.

3. Déduire de ce résultat que si x est un terme de la suite u, alors $x + 3$ est un terme de la suite u.
4. Déterminer l'écart minimal et l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite u.

Partie B

On considère maintenant la suite v de tous les entiers strictement positifs dont la somme des chiffres est divisible par 5. Par exemple, le nombre 3 241 est un terme de la suite v car la somme $\sigma(3241)=3+2+4+1=10$, et 10 est divisible par 5.

1. Les trois premiers termes de la suite v sont 5, 14 et 19. Donner la liste des 7 termes suivants.
2. Déterminer l'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite v.
3. On s'intéresse à l'écart entre deux termes consécutifs de la suite v.
   Pour cette question, on pourra utiliser la propriété suivante :
   La division euclidienne de X par 10 énonce qu'il existe deux entiers positifs ou nuls uniques Y et R tels que
   $X = 10Y + R$, avec $0 \leq R < 10$. La somme des chiffres de X est alors égale à celle de Y augmentée de R, c'est-à-dire que $\sigma(X) = \sigma(Y) + R$.

   a. Montrer que si un terme x de la suite v finit par un chiffre compris entre 0 et 4, alors le terme suivant de cette suite est $x + 5$.
   b. Montrer alors que l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite v est exactement 9.

Partie C

On s'intéresse enfin à la suite w de tous les entiers strictement positifs dont la somme des chiffres est divisible par 10.

a. Démontrer que l'écart minimal entre deux termes consécutifs de la suite est exactement 1.
b. Démontrer que l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la suite est exactement 19.

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Fibonacci en musique

À chacune des 12 notes de la gamme on attribue un nombre entier entre 0 et 11 selon le tableau de correspondance suivant :

Notes	*Nombre entier correspondant*
Do	*0*
do#	*1*
Ré	*2*
ré#	*3*
Mi	*4*
Fa	*5*
fa#	*6*
Sol	*7*
sol#	*8*
La	*9*
la#	*10*
Si	*11*

Soit (F_n) une suite de nombres entiers définie par ses deux premiers termes F_0 et F_1 et la relation de récurrence : $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

Soit m un entier naturel non nul inférieur ou égal à 12.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le reste de la division euclidienne de F_n par m.

1. On suppose dans cette question que $m=6$.

a. On choisit dans cette question $F_0=2$et $F_1=3$. On obtient alors $F_2=5$, $F_3=8$ et $F_4=13$.
Puis on trouve ainsi $u_0=2$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=2$ et $u_4=1$.
Les notes correspondantes sont alors *ré*, *ré#*, *fa*, *ré* et *do#*.
Calculer F_5 , F_6 et F_7, puis u_5, u_6 et u_7 et déterminer les notes correspondantes.

b. Si les deux premières notes sont *ré* et *mi*, quelles sont les huit suivantes ?

2. Pour tout entier naturel *m* inférieur ou égal à 12 et F_0 et F_1 entiers quelconques.
Expliquer pourquoi on peut associer à chaque terme de la suite (u_n) une unique note de la gamme.

On appelle ainsi mélodie *chaque suite* (u_n) *et on appellera aussi* mélodie *la suite de notes correspondant à* (u_n).
Lorsque qu'une mélodie est constituée d'une série de notes (appelée boucle) qui se répètent indéfiniment, on dit qu'elle est périodique. La période est alors le nombre de notes minimum d'une boucle de cette mélodie.
Par exemple, pour m = 5, la mélodie do# ; ré# ; mi ; ré ; do# ; ré# ; mi ; ré ; do# ; ré# ; ... (qui correspond à la suite 1 ; 3 ; 4 ; 2 ; 1 ; 3 ; 4 ; 2 ; 1 ; 3 ; ...) comporte plusieurs boucles dont la plus petite est de longueur 4. Elle est donc périodique et sa période vaut 4.

On suppose dans la suite de l'exercice que $m=12$.

3.

a. Montrer que la mélodie qui commence par les notes *do* et *mi* comporte une boucle de période 8.

b. En changeant les deux premières notes, trouver une mélodie qui comporte une boucle de période 24.

c. Peut-on avoir une boucle de période 1 ? de période 3 ?

4.

a. Retrouver les deux premières notes de la mélodie suivante.

- ; - ; - ; - ; - ; - ; - ; - ; *sol* ; *fa* ; - ; - ; - ; ...

b. Démontrer que toutes les mélodies sont périodiques.

c. Démontrer qu'une période est inférieure ou égale à 144.

d. Proposer deux premières notes pour avoir une infinité de fois la note *la* dans la mélodie.

5. Calculer le nombre total de mélodies.