Classe de premières générales
et technologiques

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Groupement :

Académie de Montpellier

Séries ES, L et Technologiques

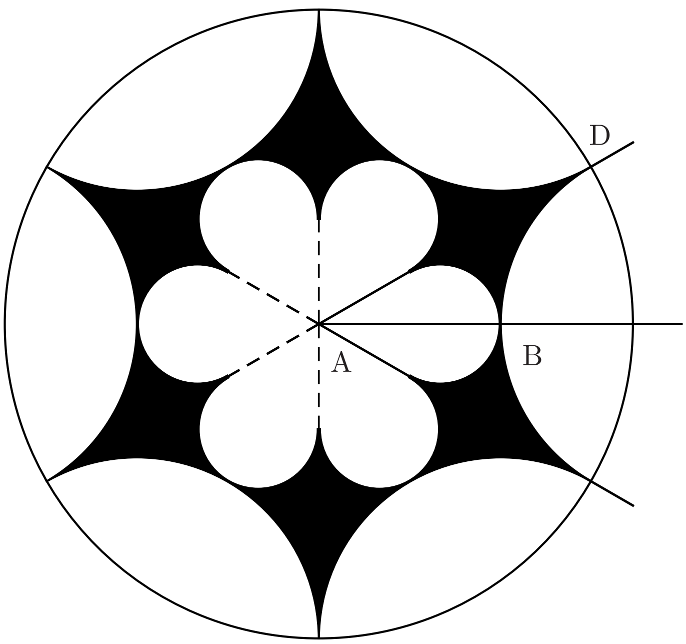
Durée : 4 heures

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la précision des justifications seront prises en compte.
Toute initiative, même infructueuse, pourra être prise en compte.

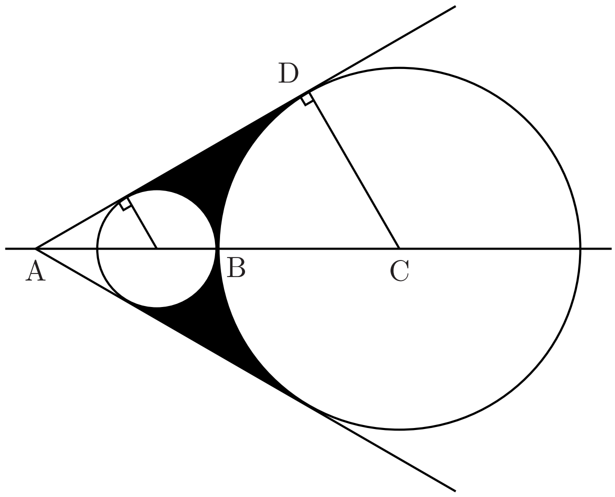
Exercice 1 *(National)* ***La rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous, construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. a. Montrer que AB=BC.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2 *(National)* ***A la recherche du « chaînonze »***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« *Un nombre inférieur à* 999 *est divisible par* 11 *si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut* 0 *ou* 11 ».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est d ivisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter à droite de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres. Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^e chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous ?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de trois chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

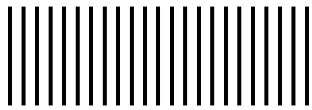
   a. Etudier le cas particulier « a a ».
   b. Etudier le cas $b = a - 1$.
   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice 3 *(Académique)* *Le jeu de « Nîmes »*

Règle du jeu :

- C'est un jeu à deux joueurs.
- Face à un alignement de bâtonnets, chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets, au choix.
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.



exemple avec 23 batonnets

Vous êtes opposé à un adversaire (c'est en fait un ordinateur !) .

Partie A : Il reste 6 bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.

1. Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.
2. Élaborer la stratégie gagnante (c'est-à-dire quel(s) coup(s) jouer pour être sûr(e) de gagner la partie quoique fasse l'adversaire).

Partie B : Avec n bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.

1. Pour $n = 101$, quelle est la stratégie gagnante ?
2. Si n est un nombre entier non nul, existe-t-il une stratégie gagnante ?

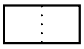
Partie C : Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu.

Dans cette partie, on modifie la règle du jeu : les joueurs ne peuvent retirer, à chaque tour, que 2 ou 3 batônnets. (On n'a plus le droit de retirer un seul batônnet)

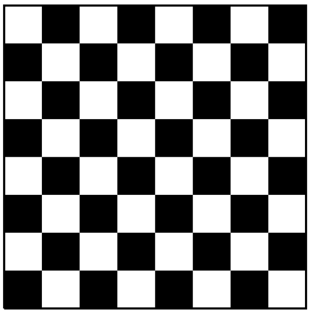
Vous commencez la partie. Pour quelle(s) valeur(s) de n y a t'il une stratégie gagnante ?

Exercice 4 *(Académique)* ***Damiers et dominos***

Posé sur un damier, un domino peut recouvrir exactement deux cases ayant un bord commun. Dans la suite recouvrir (par des dominos) signifie que les dominos servant à recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases données sont exactement recouvertes.
n est un nombre entier non nul.



Domino



Damier

1. Peut-on recouvrir un damier ayant 9 cases de côté ?
2. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré la case située en haut à gauche ?
3. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ? (on rappelle qu'un damier comporte des cases blanches et des cases noires)
4. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n + 1$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ?
5. Démontrer qu'il est possible de recouvrir un damier ayant $2n + 1$ cases de côté dont on a retiré la case située en haut à gauche.