Classe de premières générales
et technologiques

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Groupement :

Académie de Montpellier

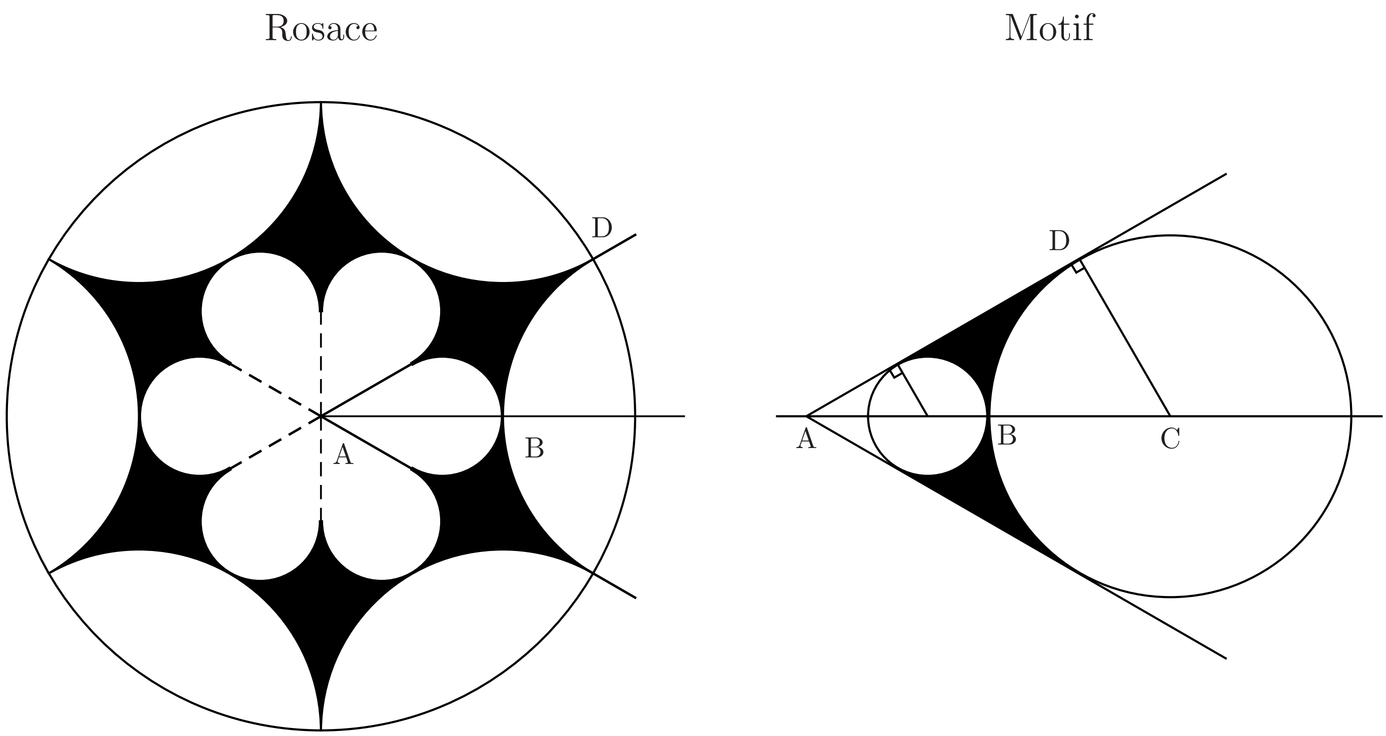
Série S

Durée : 4 heures

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
La rédaction et la qualité des raisonnements seront prises en compte.
Toute initiative, même infructueuse, pourra être prise en compte.

Exercice 1 *(National)* ***La rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous, construit à l'aide de deux cercles.



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. a. Montrer que AB=BC.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2 *(National)* ***A la recherche du « chaînonze »***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« *Un nombre inférieur à* 999 *est divisible par* 11 *si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut* 0 *ou* 11 ».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter à droite de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres. Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^e chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous ?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

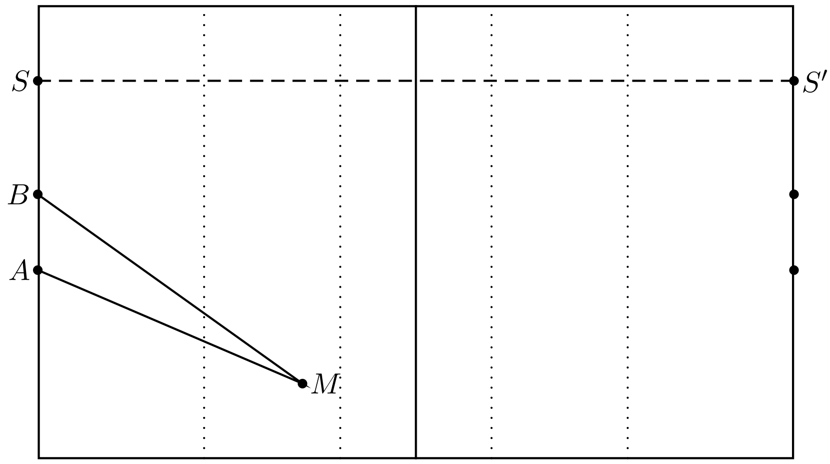
4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de trois chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».
   b. Etudier le cas $b = a - 1$.
   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice 3 *(Académique)* ***Angle de tir***

On a représenté ci-dessous un terrain de rugby. Un joueur a posé le ballon en M et « tente un coup de pied » dit « de pénalité » : il s'agit de faire passer le ballon entre les poteaux A et B.

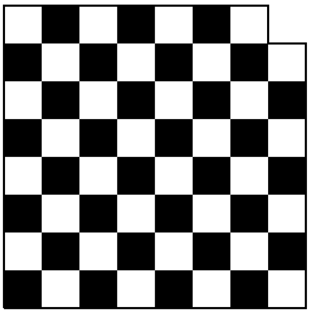


L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé *angle de tir*. L'ouverture de cet angle est un élément décisif pour la réussite de ce coup de pied.

1. Représenter sur le terrain trois autres points que M qui offrent le même angle de tir que l'angle $\widehat{AMB}$?
2. Le joueur « marque un essai »au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment $[SS']$ pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).
   a. Y-a-t-il une ou plusieurs positions qui offrent le même angle de tir que lors de la pénalité précédente ?
   b. Où faut-il placer le ballon sur le segment $[SS']$ pour que l'angle de tir soit maximal ?

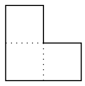
Exercice 4 *(Académique)* ***Damiers tronqués et Triminos***

On suppose que n est entier non nul. Soit un damier ayant 2^n cases par côté. On enlève une case de coin à ce damier.



Damier tronqué pour $n = 3$

Un *trimino* est une pièce de la forme ci-dessous et qui peut recouvrir exactement 3 cases de damier :



Par exemple, si $n = 1$ (2^1 cases par côté, le damier tronqué a donc 3 cases), un seul trimino permet de recouvrir le damier tronqué .
Dans la suite recouvrir (par des triminos) un damier tronqué donné signifie que les triminos servant à le recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases du damier tronqué sont exactement recouvertes.
Il est permis de tourner les triminos dans tous les sens.

1. Faire un dessin pour $n = 2$ (4 cases par côté), et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
2. Faire un dessin pour $n = 4$ (16 cases par côté) montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
3. Prouver que si l'on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin, alors on peut aussi recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^{n+1} cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.

   A ce niveau, on peut conclure que, pour tout $n > 0$, on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.

4. Le nombre $2^{2^{2010}} - 1$ est-il divisible par 3 ?