MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Montpellier

Mercredi 14 mars 2018 de 10h10 à 12h10

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices Académiques

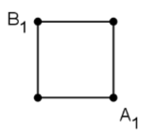
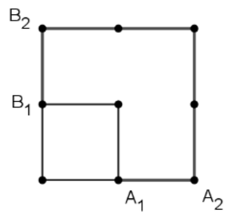
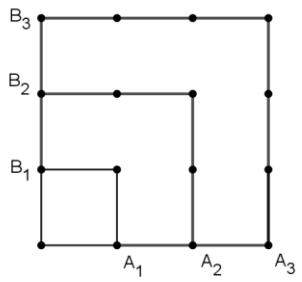
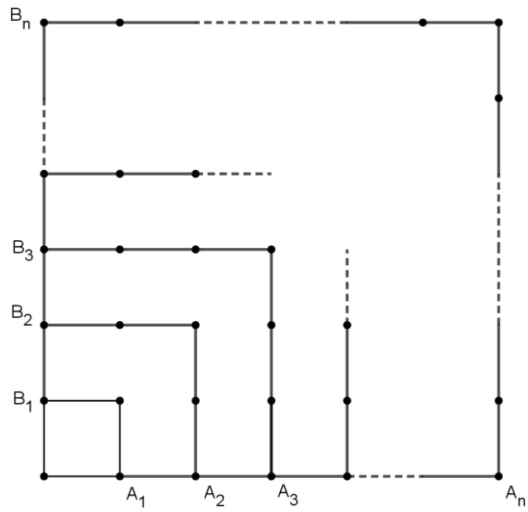
Les candidats traitent **deux exercices :**

- **Les candidats de la série S** traitent les exercices numéro 1 (*Le parcours du robot*) et numéro 2 (*polygones étoilés réguliers*).
- **Les autres candidats** traitent les exercices numéro 1 (*Le parcours du robot*) et numéro 3 (*intersections de droites*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le parcours du robot

On considère une suite de réseaux construits sur un maillage carré de coté 1, tels que décrits ci-dessous :

			
Réseau R_1 4 points et 4 segments de longueur 1	Réseau R_2 9 points et 10 segments de longueur 1	Réseau R_3 16 points et 18 segments de longueur 1	Réseau R_n

Chaque réseau est constitué de points, et de segments de longueur 1.
On place un robot sur un des points du réseau. Il se déplace de points en points, en suivant les segments du réseau.

On suppose le robot programmé pour s'arrêter après avoir parcouru tous les segments du réseau ; on appelle **parcours** du robot la donnée de son point de départ, qui peut être quelconque dans le réseau et de son point d'arrivée après être passé **au moins une fois** par tous les segments du réseau. La longueur du parcours est le nombre de segments de longueur 1 du parcours du robot.

Le but de ce problème est de minimiser la longueur du parcours du robot sur le réseau R_n en précisant le point de départ sur le réseau, le chemin le plus court possible passant par tous les segments de longueur 1 du réseau.
La longueur de ce parcours minimal est alors noté L_n.

1. Préambule
   - **a.** Donner le nombre de segments de longueur 1 composant le réseau R_4.
   - **b.** Déterminer le nombre de segments de longueur 1 du réseau R_{20}.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on rappelle que L_n est la longueur minimale du parcours du robot sur le réseau R_n.
   - **a.** Justifier que $L_1 = 4$ et que $L_2 = 10$.
   - **b.** Démontrer que $L_3 = 19$, c'est-à-dire que sur le réseau R_3, on peut trouver un parcours du robot de longueur 19, mais pas de parcours plus court.

3.
   - **a.** On se place sur le réseau R_n. Justifier que, en partant de n'importe quel point du réseau, on peut atteindre un des deux sommets A_n ou B_n en n étapes au maximum.
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $L_{n+1} \leq L_n + 3n + 4$

4.
   - **a.** Démontrer que sur le réseau R_{20}, le robot ne peut pas effectuer un parcours inférieur ou égal à 460.
   - **b.** Démontrer que sur le réseau R_{20}, il peut par contre effectuer un parcours inférieur ou égal à 650.

Exercice académique numéro 2
(à traiter par les candidats de la série S)

Polygones étoilés réguliers

Pour dessiner des figures géométriques à l'aide d'un algorithme, on peut utiliser la « tortue » et ses deux commandes : **avance(d)** qui permet de tracer un segment de longueur d et **gauche(α)** qui fait tourner d'un angle α en degrés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Par exemple, le dessin ci-contre (*figure 1*) est obtenu par le script suivant :

avance(5),
gauche(60),
avance(10),
gauche(45),
avance (10)

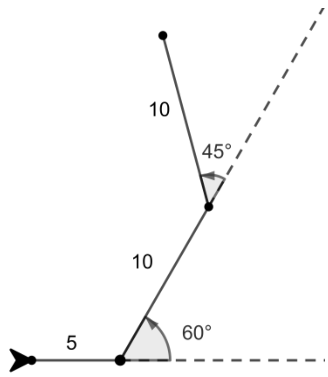


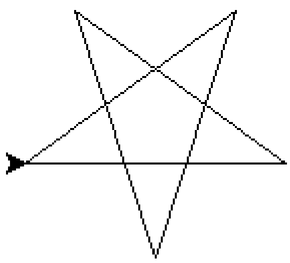
Figure 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout nombre α appartenant à l'intervalle [0 ; 360] on considère l'algorithme suivant, qu'on appelle *Algo*(n ; α), qui utilise ces deux commandes :

Pour i allant de 1 à n
avance(5)
gauche(α)
Fin pour

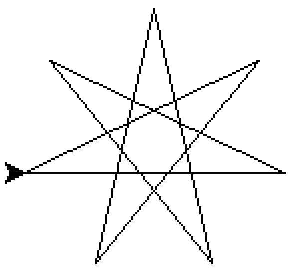
1. Tracer la figure obtenue en appliquant cet algorithme lorsque $n = 6$ et $\alpha = 60°$ (prendre le centimètre comme unité graphique).

2. Donner une valeur possible pour n et pour α pour que l'algorithme *Algo*(n ; α) permette de dessiner ce polygone étoilé régulier à 5 sommets (dont chaque coté est de longueur 5) :



3. On suppose dans cette question que $n = 7$.

a. Déterminer la valeur de l'angle α qui permet à l'algorithme *Algo*(7 ; α) d'obtenir ce polygone étoilé régulier :



b. Donner une autre valeur de α pour lequel l'algorithme *Algo*(7 ; α) dessine un second polygone étoilé régulier à 7 sommets, différent de celui de la question 3.a.

4. Dessiner à main levée tous les polygones étoilés réguliers différents ayant 5 sommets, puis 6 sommets, puis 7 sommets, puis 8 sommets, puis 9 sommets obtenus par l'algorithme.

5. Si $n = 2018$, combien de polygones étoilés réguliers différents à 2018 sommets l'algorithme *Algo*(2018 ; α) permet-il de dessiner ?

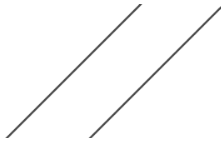
6. Déterminer une valeur de n pour laquelle l'algorithme *Algo*(n ; α) permette de dessiner exactement 50 polygones étoilés réguliers différents à n sommets.

Exercice académique numéro 3
(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

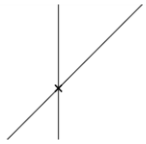
Intersections de droites

On considère n droites distinctes du plan (n étant un entier supérieur ou égal à 2).
On s'intéresse à tous les points obtenus par intersection de deux de ces droites au moins.
On nomme alors I_n l'ensemble de tous ***les nombres de points d'intersection possibles*** avec n droites distinctes (ainsi, le nombre k est dans I_n signifie qu'on peut tracer n droites du plan ayant exactement k points d'intersection).

Exemple 1 : pour déterminer I_2, on considère deux droites distinctes : soit elles sont parallèles (donc avec 0 point d'intersection), soit elles sont sécantes en un point (donc 1 point d'intersection). Il n'y a pas d'autres possibilités. Donc $I_2 = \{0 ; 1\}$.

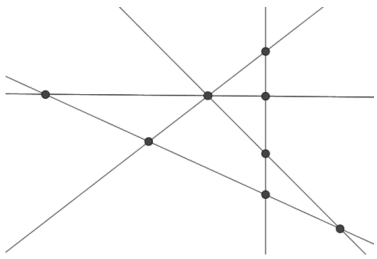


0 point d'intersection



1 point d'intersection

Exemple 2 : Comme le montre la figure ci-dessous, on peut tracer cinq droites ayant huit points d'intersection : cela permet de justifier que le nombre 8 est dans I_5.



1. Déterminer I_3, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres de points d'intersection possibles avec 3 droites distinctes.

2.
- **a.** Démontrer que 2 n'appartient pas à I_4, c'est-à-dire qu'avec 4 droites distinctes, il n'est pas possible d'avoir deux points d'intersection uniquement.
- **b.** En déduire que $I_4 = \{0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

3. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2.
Montrer que si a et b sont deux entiers non nuls tels que $a + b = n$, alors le nombre ab appartient à I_n.

4. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2.
- **a.** Démontrer que le plus grand nombre appartenant à I_n est $\frac{n(n-1)}{2}$.
- **b.** Démontrer que si n est inférieur ou égal à 64, alors 2018 n'appartient pas à I_n.
- **c.** Trouver un entier naturel n inférieur ou égal à 100 tel que 2018 appartient à I_n.