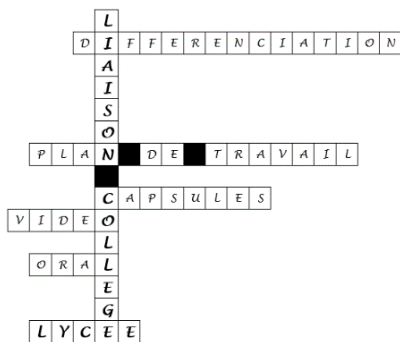


LIAISON COLLÈGE-LYCÉE :

PLAN DE TRAVAIL SUR LA NOTION DE FONCTION



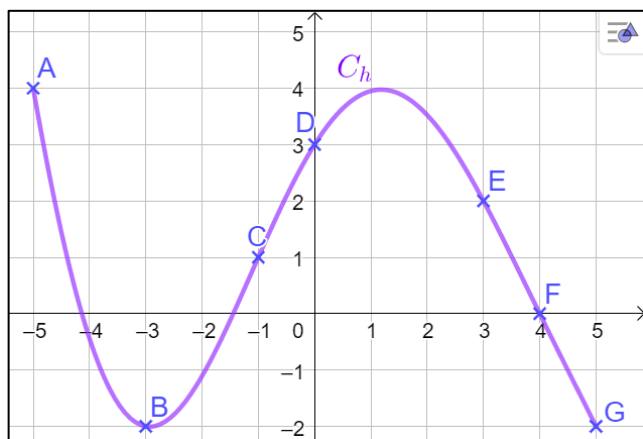
Une proposition de correction complète.

PARCOURS ☀	PARCOURS ☀☀	PARCOURS ☀☀☀
Exercice 1 <i>Automatismes</i>	Exercice 1 <i>Automatismes</i>	Exercice 1 <i>Automatismes</i>
Exercice 2 <i>Capacités associées à Communiquer</i>	Exercice 2 <i>Capacités associées à Communiquer</i>	Exercice 2 <i>Capacités associées à Communiquer</i>
Exercice 3 <i>Capacités associées à Chercher</i>	Exercice 4 <i>Capacités associées à Chercher</i>	Exercice 5 <i>Capacités associées à Chercher et Raisonner</i>
Exercice 6 <i>Automatismes</i>	Exercice 7 <i>Capacités associées à Calculer</i>	Exercice 8 <i>Capacités associées à Calculer</i>
Exercice 9 <i>Capacités associées à Raisonner et Calculer</i>	Exercice 10 <i>Capacités associées à Raisonner et Calculer</i>	Exercice 11 <i>Capacités associées à Raisonner et Calculer</i>
Exercice 12 <i>Capacités associées à Représenter</i>	Exercice 12 <i>Capacités associées à Représenter</i>	Exercice 13 <i>Compétences Raisonner et Représenter</i>
Exercice 14 <i>Compétences Raisonner, Modéliser et Communiquer</i>	Exercice 14 <i>Compétences Raisonner, Modéliser et Communiquer</i>	Exercice 15 <i>Compétences Modéliser, Raisonner et Communiquer</i>

Exercice 1 : (☀) ou (☀☀) ou (☀☀☀) / Automatismes

Voici la représentation graphique d'une fonction h .

* Note pour les élèves de 2^{de} : Cette fonction h est définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.



1) Quelle est l'image de -1 par la fonction h ?

L'image de -1 par la fonction h est 1. $h(-1) = 1$

2) Quelle est l'image de 4 par la fonction h ?

L'image de 4 par la fonction h est 0. $h(4) = 0$

3) Trouver un antécédent de 3 par la fonction h .

0 est un antécédent de 3 par la fonction h . $h(0) = 3$

4) Compléter :

• $h(-5) = 4$

• $h(3) = 2$

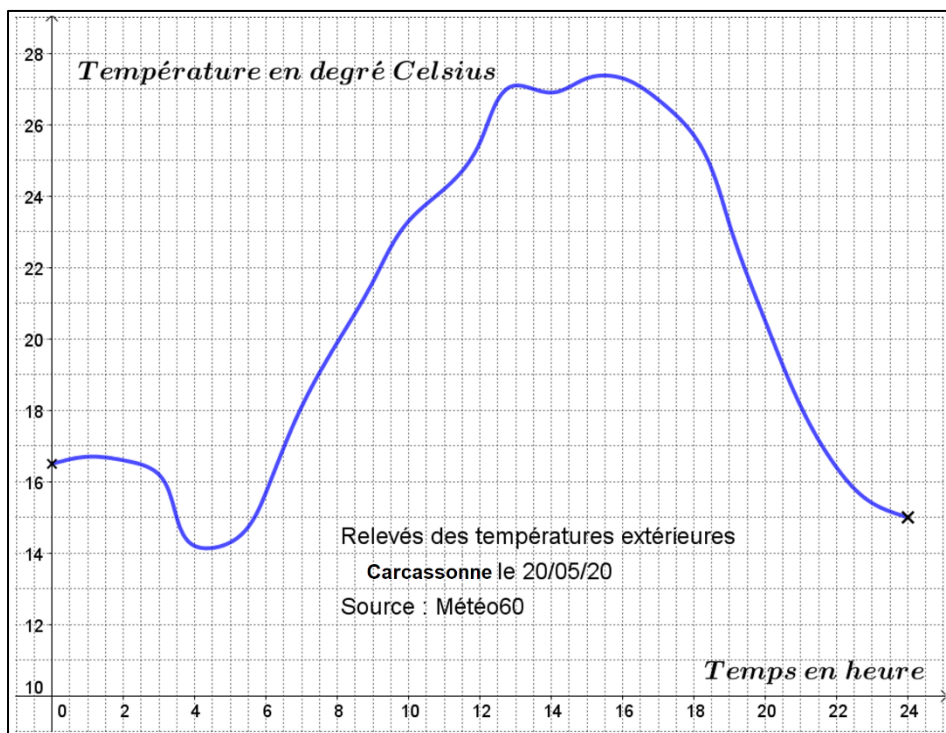
5) Déterminer les antécédents de 1 par la fonction h . (On pourra donner des valeurs approchées.)

Les antécédents de 1 par la fonction h sont $-4,4$ et -1 et $3,5$. $h(-4,4) = 1$; $h(-1) = 1$ et $h(3,5) = 1$

Exercice 2 : ☀️ ou ☀️☀️ ou ☀️☀️☀️ / Capacités associées à Communiquer

Que représente cette courbe ?

Cette courbe représente la température extérieure en degré Celsius en fonction de l'heure de la journée à Carcassonne le 20 mai 2020.



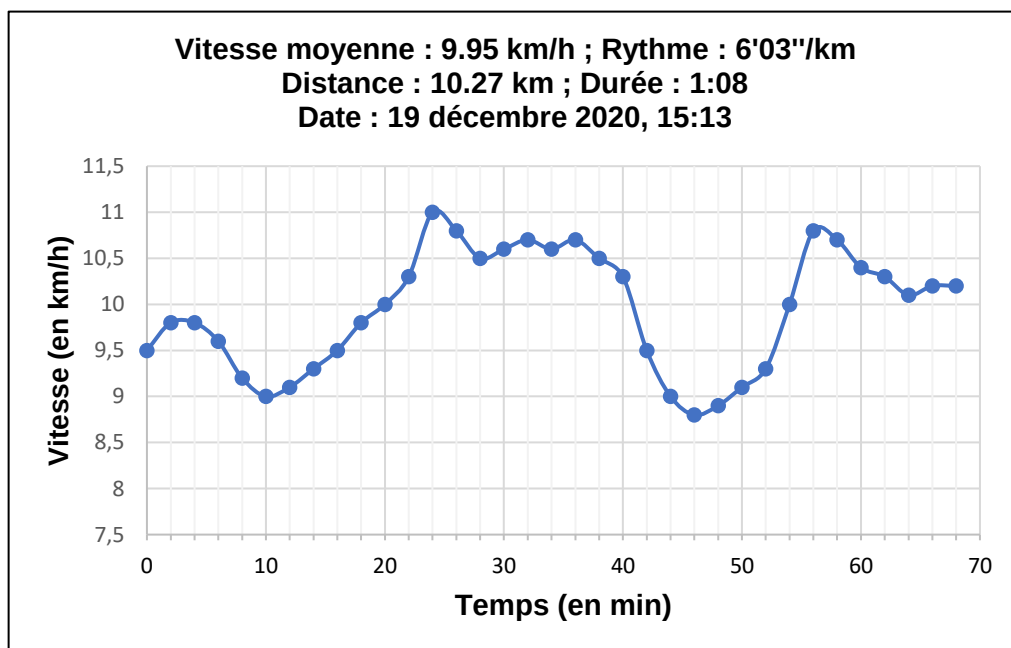
Exercice 3 : ☀️ / Capacités associées à Chercher

Yacine fait un footing tous les jours.

Le GPS de son téléphone qui enregistre à tout moment sa vitesse lui a tracé la courbe ci-contre (le temps de course est exprimé en minutes et la vitesse en km/h).

1) Le GPS a-t-il représenté la vitesse en fonction du temps ou le temps en fonction de la vitesse ?

Le GPS a représenté la vitesse (en km/h) en fonction du temps (en min).



2) Quelle est la vitesse de Yacine au bout de 10 minutes ? 9 km/h 24 minutes ? 11 km/h

3) À quel(s) moment(s) la vitesse de Yacine est-elle égale à 10 km/h ?

Au bout de 20 min, de 41 min et de 54 min.

11 km/h ? 24 min 11,5 km/h ? jamais

4) Compléter le tableau suivant.

Temps (en min)	0	10	24	50	68
Vitesse (en km/h)	9,5	9	11	9,1	10,2

Exercice 4 : (☀☀) / Capacités associées à Chercher

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f à l'aide des huit phrases ci-dessous.

x	-1	4	6	3	-2	5	2	8
$f(x)$	6	$\frac{1}{6}$	64	16	2	3	8	$-\frac{1}{6}$

- $f(2) \times f(3) \times f(4) \times f(5) = f(6)$.
- L'image de 2 par la fonction f est 8.
- 4 a pour image $\frac{1}{6}$ par la fonction f .
- Un antécédent de 3 par la fonction f est 5.
- L'image de 3 est le double de l'image de 2 par la fonction f .
- L'image de 4 est l'opposé de l'image de 8 par la fonction f .
- L'image de 4 et l'image de -1 par la fonction f sont inverses l'une de l'autre.
- L'image de -1 est le triple de l'image de -2 par la fonction f .

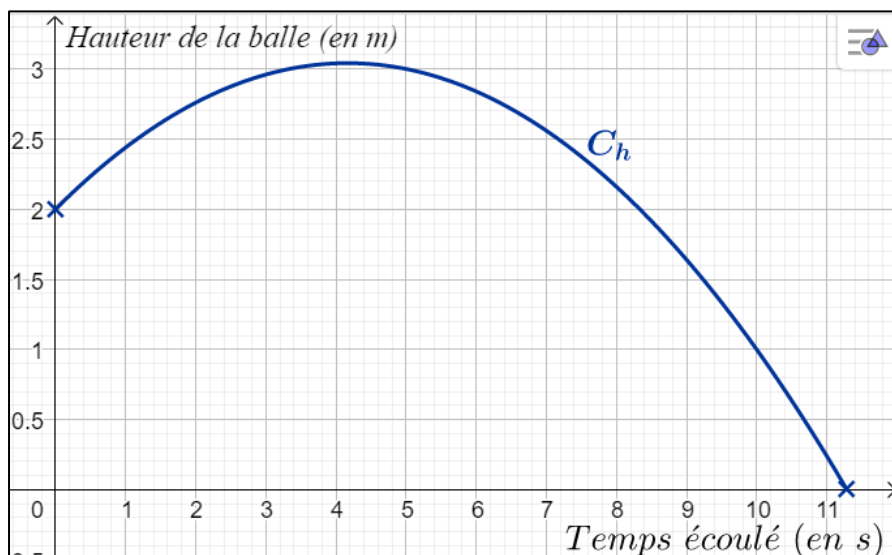
Exercice 5 : (☀☀☀) / Capacités associées à Chercher et Raisonner

Un enfant lance une balle de tennis dont la hauteur est modélisée par une fonction h : $h(t)$ représente la hauteur de la balle, en mètres, en fonction du temps écoulé t , en secondes, depuis le lancer jusqu'à l'impact au sol.

La fonction h est représentée dans le repère ci-contre.

1) Parmi les trois expressions suivantes, entourer celle qui est correcte. Justifier.

- $h(t) = t + 2$
- $h(t) = -0,06t^2 + 0,5t + 2$
- $h(t) = -0,06t^2 + 0,5t + 3$



Graphiquement, on lit $h(0) = 2$ et $h(5) = 3$, donc l'expression qui convient est : $h(t) = -0,06t^2 + 0,5t + 2$.

2) Donner une valeur approchée de la hauteur maximale de la balle. À quel instant a-t-elle été atteinte ?

La hauteur maximale de la balle est de 3,05 m environ, atteinte à l'instant $t = 4$ s.

3) Au bout de combien de temps la balle retombe-t-elle au sol ?

La balle retombe au sol au bout de 11,2 s environ.

4) Calculer la hauteur de la balle 2,5 s après le lancer.

$$h(2,5) = -0,06 \times 2,5^2 + 0,5 \times 2,5 + 2 = 2,875 \text{ m.}$$

5) À quel(s) instant(s) la balle atteint-elle une hauteur de 2,5 m ?

Graphiquement on lit que la balle atteint la hauteur de 2,5 m à 1,2 s et 7,2 s environ.

Exercice 6 : (☀) / **Automatismes**

On considère la fonction g définie, pour tout nombre x , par $g(x) = 3x + 7$.

1) Calculer l'image de 0 par la fonction g . $g(0) = 3 \times 0 + 7 = 7$

2) Calculer $g(-2)$. $g(-2) = 3 \times (-2) + 7 = 1$

3) Calculer l'antécédent de 10 par la fonction g .

$$3x + 7 = 10$$

$$3x = 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}, \text{ soit } x = 1$$

Exercice 7 : (☀☀) / **Capacités associées à Calculer**

On considère le programme de calcul suivant et on nomme g la fonction qui, à tout nombre choisi, associe le résultat donné par ce programme.

1) Soit x un nombre quelconque. Compléter : $g(x) = 7x - 8$

2) Calculer l'image de 0 par la fonction g . $g(0) = -8$

3) Calculer $g(-3)$. $g(-3) = 7 \times (-3) - 8 = -29$

4) En appliquant ce programme de calcul à un nombre, Hugues a obtenu 20.
Quel(s) nombre(s) a-t-il pu choisir ?

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 7
- Enlever 8

Pour répondre à cette question il y a deux méthodes possibles :

1^{re} méthode : on remonte le programme de calcul.

$$20 + 8 = 28$$

$$28 \div 7 = 4$$

2^{de} méthode : on résout une équation.

$$7x - 8 = 20$$

$$7x = 28$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{28}{7}, \text{ soit } x = 4$$

Hugues a pu choisir **le nombre 4**.

Exercice 8 : (☀☀☀) / **Capacités associées à Calculer**

On considère le programme de calcul suivant et on nomme g la fonction qui, à tout nombre choisi, associe le résultat donné par ce programme.

1) Soit x un nombre quelconque. Compléter : $g(x) = 5x^2$

2) Calculer l'image de 0 par la fonction g . $g(0) = 0$

3) Calculer $g(-3)$. $g(-3) = 5 \times (-3)^2 = 45$

4) En appliquant ce programme de calcul à un nombre, Erwin a obtenu 80.
Quel(s) nombre(s) a-t-il pu choisir ?

- Choisir un nombre
- Calculer le carré de ce nombre
- Multiplier le résultat par 5

$$5x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = \frac{80}{5} = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} = 4 \text{ ou } x = -\sqrt{16} = -4$$

Erwin a pu choisir **les nombres 4 ou -4**.

Exercice 9 : (☀) / **Capacités associées à Raisonner et Calculer**

On considère la fonction f , qui à tout nombre, associe son triple.

1) Quel nombre la fonction f associe-t-elle à 3,5 ? $3,5 \times 3 = 10,5$, soit $f: 3,5 \mapsto 10,5$

2) Quelle est l'image de -3 par la fonction f ? $f(-3) = 3 \times (-3) = -9$

3) Soit x un nombre quelconque. Compléter : $f(x) = 3x$

4) Quel(s) nombre(s) de départ doit-on choisir pour obtenir 36 avec la fonction f ?

$$3x = 36 \Leftrightarrow x = 36 : 3 = 12. \text{ Le nombre de départ à choisir est } 12.$$

5) Compléter : $f(6) = 18$

$$f(7) = 21$$

6) Compléter : $f: 1 \mapsto 3$

$$f: -9 \mapsto -27$$

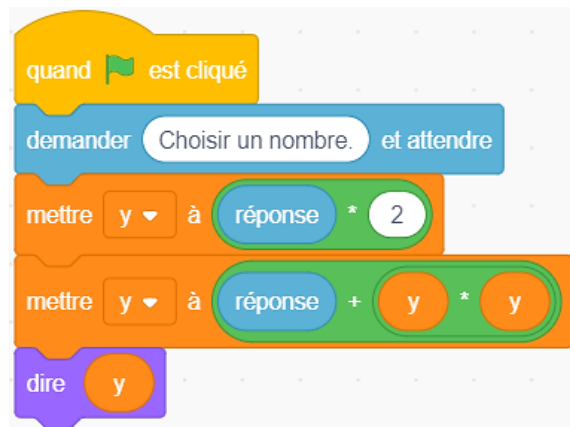
Exercice 10 : (☀☀☀) / Capacités associées à Raisonner et Calculer

On considère la fonction f , qui à tout nombre, associe son carré.

- 1) Quel nombre la fonction f associe-t-elle à 3 ? $f: 3 \mapsto 9$
- 2) Quelle est l'image de -5 par la fonction f ? $f(-5) = (-5)^2 = 25$
- 3) Soit x un nombre quelconque. Compléter : $f(x) = x^2$
- 4) Quel(s) nombre(s) de départ peut-on choisir pour obtenir 81 avec la fonction f ?
 $x^2 = 81 \Leftrightarrow x = 9$ ou $x = -9$. On peut choisir au départ **9 ou -9**.

Exercice 11 : (☀☀☀) / Capacités associées à Raisonner et Calculer

On considère la fonction g , qui à tout nombre choisi, associe le résultat donné par le programme de calcul suivant.



- 1) Quelle est l'image de 7 par la fonction g ?

L'image de 7 par la fonction g est **203**,

(car $7 + 14 \times 14 = 203$).

- 2) Si x est le nombre de départ, quelle est l'expression de $g(x)$?

$$g(x) = x + 2x \times 2x = x + 4x^2$$

- 3) Guillaume pense que l'image d'un nombre négatif est toujours inférieure à celle d'un nombre positif.

A-t-il raison ? Justifier.

$$g(-10) = -10 + 4 \times (-10)^2 = 390 \text{ et } 390 > 203$$

L'image de -10 est supérieure à celle de 7. **Guillaume a tort.**

Exercice 12 : (☀) ou (☀☀) / Capacités associées à Représenter

Voici plusieurs informations incomplètes à propos d'une fonction f .

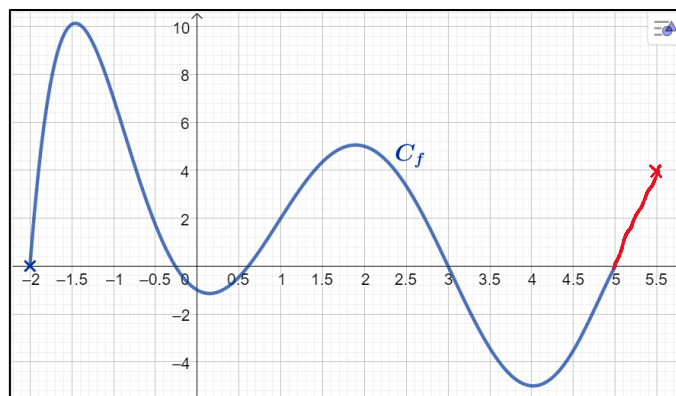
* Note pour les élèves de 2^{de} : Cette fonction f est définie sur l'intervalle $[-2 ; 5,5]$.

À l'aide des données fournies, compléter les informations manquantes.

Informations n°1 : Tableau de valeurs de la fonction f à compléter.

x	-2	-1	-0,25	0	0,6	1	1,5	2	3	5	5,5
$f(x)$	0	7	0	-1	0	2	4,4	5	0	0	4

Informations n°2 : Courbe représentative de la fonction f à compléter.



Informations n°3 : Phrases à compléter.

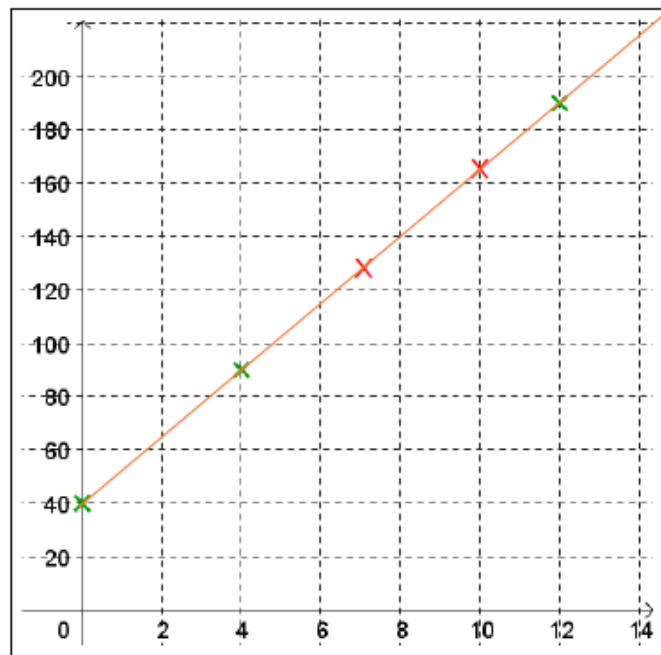
- Par la fonction f , l'image de 5,5 est le carré de l'image de 3,3.
 $f(3,3) = -2$; $(-2)^2 = 4$: on complète la courbe avec $f(5,5) = 4$.
- 4 a **5** antécédents par la fonction f .
- **-1,2** a trois antécédents par la fonction f .
- **6** a deux antécédents par la fonction f .
- A est un point appartenant à la courbe représentative de la fonction f : ses coordonnées sont A(**4** ; -5).

Exercice 13 : (☀☀☀) / Compétences Raisonner et Représenter

Fanny a planté des pousses de bambous en bordure de son terrain. De temps en temps, elle effectue des relevés et complète un tableau et un graphique avec ses mesures.



x (en jours)	0	4	7	10	12
y (en cm)	40	90	127,5	165	190

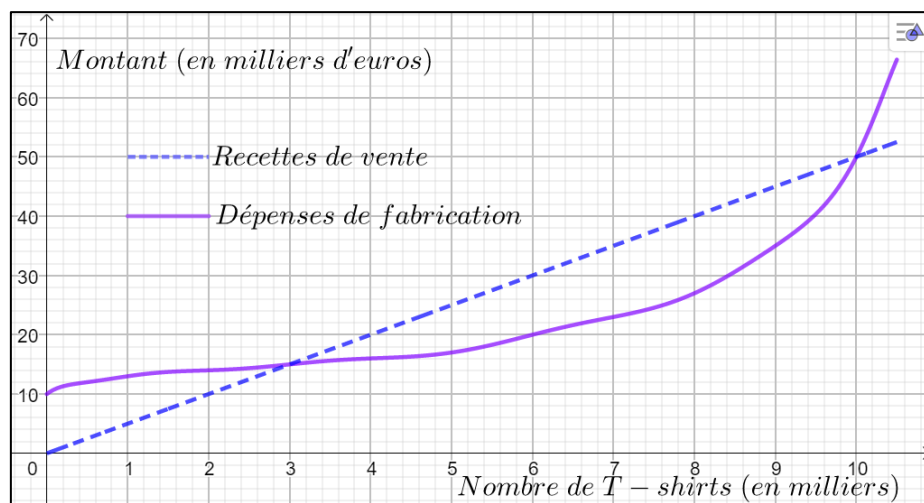


- 1) Compléter le tableau et le graphique.
- 2) Effectuer une prévision.
Quelle devrait être la hauteur des bambous de Fanny au bout de 20 jours ?

Quand on complète le graphique à l'aide du tableau de valeurs, on remarque que les points obtenus sont alignés. On peut alors réfléchir sur des écarts constants : l'écart journalier est de $(90 - 40) \div 4 = 12,5 \text{ cm}$, et on trouve alors $40 + 12,5 \times 20 = \mathbf{290 \text{ cm}}$ au bout du 20^e jour.

Exercice 14 : (☀) ou (☀☀) / Compétences Raisonner, Modéliser et Communiquer

Une usine peut fabriquer au maximum 10 500 t-shirts par mois. Les courbes ci-contre représentent les dépenses de fabrication et les recettes de vente en fonction du nombre de t-shirts produits. Combien de t-shirts doivent être vendus pour gagner 8 000 € ? Expliquer.

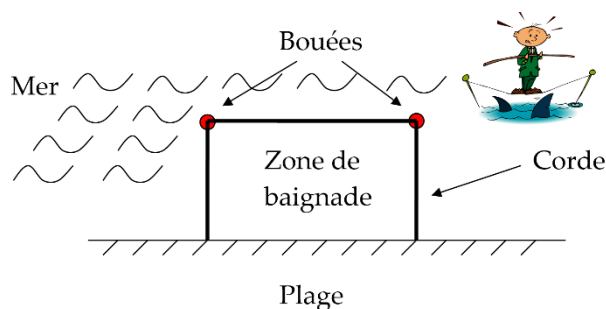


Pour trouver le nombre de t-shirts à vendre pour gagner 8 000 €, il faut regarder lorsque l'écart entre les deux courbes correspond à 8 000 €.

D'après les unités graphiques, cet écart est atteint lorsque l'on a 4 carreaux d'écart. Plusieurs réponses sont possibles, par exemple pour **5 200 et 9 200 t-shirts vendus**, l'usine gagnera 8 000 €.

Exercice 15 : (☀☀☀) / Compétences Modéliser, Raisonner et Communiquer

Sur une plage, Tim, le maître-nageur d'un centre de vacances décide d'installer une zone de baignade rectangulaire. Pour cela, il installe deux piquets sur la plage et deux bouées dans l'eau pour former une zone de sécurité à l'aide d'une corde. La longueur totale de cette corde est de 100 m.



Comment disposer la corde afin que l'aire de baignade soit maximale ? Expliquer.

❖ **Compréhension du problème : un (ou des) exemple(s) de zone de baignade possible ?**

La zone de baignade est un rectangle. La corde utilisée pour faire la ligne d'eau a une longueur de 100 m.



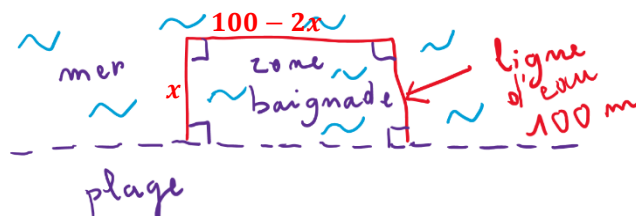
Exemple 1	Exemple 2
L'aire d'un rectangle de dimensions x par y est : $x \times y$.	
La ligne a bien une longueur de 100 m : $1 + 98 + 1 = 100 \text{ m.}$	La ligne a bien une longueur de 100 m : $10 + 80 + 10 = 100 \text{ m.}$
L'aire de la zone de baignade est : $1 \times 98 = 98 \text{ m}^2.$	L'aire de la zone de baignade est : $10 \times 80 = 800 \text{ m}^2.$

❖ **Modélisation du problème :**

Quelles sont les dimensions possibles que peut prendre la zone de baignade ?

On sait que la longueur de la ligne d'eau est 100 m et que la zone de baignade a une forme de rectangle.

En notant x la distance, en mètres, entre une bouée et la plage, on déduit que la distance entre les deux bouées est donnée par l'expression $100 - 2x$.



Les nombres x et $100 - 2x$ représentent des longueurs, donc $x \geq 0$ et $100 - 2x \geq 0$.

$100 - 2x \geq 0$ équivaut à $2x \leq 100$, soit $x \leq 50$.

Par conséquent, l'aire de baignade évolue en fonction de x , nombre variant entre 0 et 50.

L'aire de baignade étant donnée par l'expression $x(100 - 2x)$, on définit une fonction f telle que, pour tout nombre x compris entre 0 et 50, $f(x) = x(100 - 2x)$.

Comment choisir la longueur x pour avoir l'aire $f(x)$ maximale ?

Le problème revient à chercher le nombre x , compris entre 0 et 50, dont l'image $f(x)$ est la plus grande. Autrement dit, le problème revient à chercher le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 50]$.

❖ **Conjecture avec un tableur (3^e) ou à la calculatrice graphique (2^{de}) :**

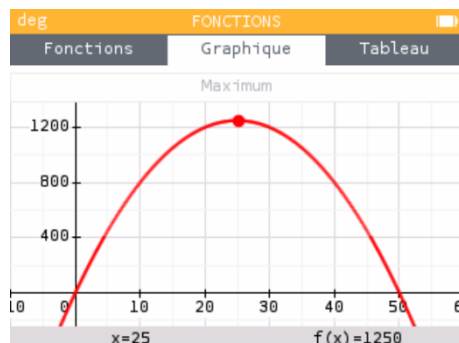
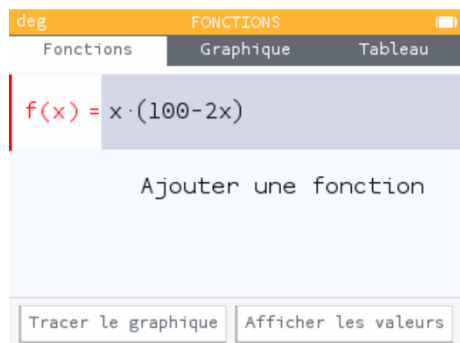
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) = x(100 - 2x)$	0	98	192	282	368	450	528	602	672	738

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x) = x(100 - 2x)$	800	858	912	962	1008	1050	1088	1122	1152	1178

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(x) = x(100 - 2x)$	1200	1218	1232	1242	1248	1250	1248	1242	1232	1218

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$f(x) = x(100 - 2x)$	1200	1178	1152	1122	1088	1050	1008	962	912	858

x	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$f(x) = x(100 - 2x)$	800	738	672	602	528	450	368	282	192	98	0



FONCTIONS	
Fonctions	Graphique
Régler l'intervalle	
x	P(x)
0	0
5	450
10	800
15	1050
20	1200
25	1250
30	1200
35	1050

On conjecture que l'aire de baignade maximale est 1250 m^2 et ce maximum semble atteint pour $x = 25 \text{ m}$.

❖ Démonstration :

Pour tout $x \in [0 ; 50]$,

$$f(x) - 1250 = x(100 - 2x) - 1250 = -2x^2 + 100x - 1250 = -2(x^2 - 50x + 625) = -2(x - 25)^2.$$

Pour tout $x \in [0 ; 50]$, $(x - 25)^2 \geq 0$ (car un carré est toujours positif), donc $-2(x - 25)^2 \leq 0$.

On en déduit que pour tout $x \in [0 ; 50]$, $f(x) \leq 1250$.

Par conséquent, 1250 est bien le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 50]$.

De plus, ce maximum est bien atteint pour $x = 25$: $f(25) = 25(100 - 2 \times 25) = 1250$.

CONCLUSION :

L'aire de baignade est maximale lorsque la largeur de la zone de baignade est 25 m et sa longueur est alors 50 m ($100 - 2 \times 25$).