

EXEMPLE DE PROGRESSION – OPTION MATHÉMATIQUES EXPERTES

Intention :

Ce document propose une progression spiralee guidée par le souci d'alterner tout au long de l'année les trois thèmes au programme, dans le but de construire un apprentissage des notions dans la continuité et de manière progressive.

Par ailleurs, il précise les prérequis nécessaires pour chacun des trois thèmes, et propose - pour la plupart des chapitres - des exemples de problèmes possibles et des pistes pour inclure l'utilisation des TICE.

Remarque :

Dans un souci de continuité des apprentissages, il convient de dissocier de la chronologie (des chapitres) les résolutions de problèmes et les exemples d'utilisation de TICE proposés. De même pour la pratique des questions « flash » et le travail donné à faire hors du temps scolaire.

Thèmes abordés :

Nombres complexes	Arithmétique	Matrices et graphes
-------------------	--------------	---------------------

Prérequis :

<ul style="list-style-type: none"> Second degré : solutions réelles d'une équation du second degré. Raisonnement par récurrence. Trigonométrie : cercle trigonométrique, cosinus et sinus d'un nombre réel. Exponentielle : propriétés algébriques, dérivée. 	<ul style="list-style-type: none"> Raisonnement par récurrence. Éléments de programmation : fonctions, boucles, listes. 	<ul style="list-style-type: none"> Raisonnement par récurrence. Suites : suite générée explicitement ou par une relation de récurrence, cas des suites géométriques, limite d'une suite géométrique.
--	---	--

	Chapitres	Contenus	Capacités attendues	Demos	Durée	
1	Les nombres complexes 1^{ère} partie : point de vue algébrique.	<ul style="list-style-type: none"> Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes. Partie réelle et imaginaire. Opérations. Conjugaison. Propriétés algébriques. Inverse d'un nombre complexe non nul. Formule du binôme dans \mathbb{C}. 	<ul style="list-style-type: none"> Effectuer des calculs algébriques. Résoudre une équation linéaire $az = b$. Résoudre une équation simple faisant intervenir z et \bar{z}. 	<ul style="list-style-type: none"> Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière. Formule du binôme. 	2s	
2	Arithmétique 1^{ère} partie : divisibilité, division euclidienne.	<ul style="list-style-type: none"> Divisibilité dans \mathbb{Z} : diviseurs et multiples, propriétés de la divisibilité. Division euclidienne d'un élément de \mathbb{Z} par un élément de \mathbb{N}^*. 	<ul style="list-style-type: none"> Déterminer les diviseurs d'un entier. Etablir et utiliser des tests de divisibilité. 	<ul style="list-style-type: none"> Propriétés de la divisibilité. 	2s	<p>Problèmes possibles</p> <ul style="list-style-type: none"> Cryptologie : <ul style="list-style-type: none"> > Chiffrements classiques : permutation circulaire (César), substitution (Vigenère), affine. <p>Exemples d'utilisation de TICE</p>

						<ul style="list-style-type: none"> • Algorithmique : liste de diviseurs, nombre de diviseurs. • Cryptologie : automatisation sur tableur (affine, Hill).
3	Calcul matriciel Redécoupage possible en séparant l'inversion	<ul style="list-style-type: none"> • Ecriture matricielle. • Opérations. • Puissance et inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3. • Application à la résolution d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant $U_{n+1} = AU_n + C$. 	<ul style="list-style-type: none"> • Modéliser une situation par une matrice. • Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée. • Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire. 		4s	Problèmes possibles <ul style="list-style-type: none"> • Introduction sur la numérisation d'images. • Problèmes d'évolution (graphes probabilistes à deux ou trois sommets). • Modèle de diffusion d'Ehrenfest, modèle « proie-prédateur ». • Interpolation « parabolique ». • Pertinence d'une page Web : le PageRank. Exemples d'utilisation de TICE <ul style="list-style-type: none"> • Problèmes d'évolution : utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite. • Sur tableur numérisation d'images (pixels : nuances de gris)
4	Les nombres complexes 2^{ème} partie : Equations polynomiales.	<ul style="list-style-type: none"> • Solutions complexes d'une équation du 2nd degré à coefficients réels. • Factorisation de $z^n - a^n$ • Factorisation d'un polynôme par $z - \text{racine}$. • Un polynôme de degré n a au plus n racines. 	<ul style="list-style-type: none"> • Résoudre une équation de degré 2 à coefficients réels. • Résoudre une équation de degré 3 dont une racine est connue. • Factoriser un polynôme dont une racine est connue. 	<ul style="list-style-type: none"> • Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. • Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ si $P(a) = 0$. • Nombre de solutions \leq degré. 	2s	Problèmes possibles <ul style="list-style-type: none"> • Equation bicarrée. • Formules de Viète • Polynômes symétriques. • Méthode de Horner. • Résolution par radicaux pour le degré 3. • Racines carrées d'un nombre complexe.
5	Arithmétique 2^{ème} partie : congruences.	<ul style="list-style-type: none"> • Congruences dans \mathbb{Z}. • Compatibilité des congruences avec les opérations. 	<ul style="list-style-type: none"> • Résoudre une congruence $ax \equiv b[n]$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Opérations sur les congruences. 	3s	Problèmes possibles <ul style="list-style-type: none"> • Cryptologie : chiffrement de Hill. Exemples d'utilisation de TICE <ul style="list-style-type: none"> • Algorithmique : liste de diviseurs, nombre de diviseurs. • Cryptologie : automatisation sur tableur (affine, Hill).
6	Les nombres complexes 3^{ème} partie :	<ul style="list-style-type: none"> • Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur. 	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe. 	<ul style="list-style-type: none"> • Formule $z ^2 = z\bar{z}$ 	3s	Problèmes possibles <ul style="list-style-type: none"> • Construction à la règle et au compas des racines nièmes de l'unité.

	point de vue géométrique.	<ul style="list-style-type: none"> • Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. • Relation $z ^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un inverse. • Ensemble U : stabilité par produit et inverse. • Arguments. Interprétation géométrique. • Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$ • Racines nièmes de l'unité : représentation géométrique. 	<ul style="list-style-type: none"> • Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point. • Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier les configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer un ensemble de points. • Utiliser les racines nièmes de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers. 	<ul style="list-style-type: none"> • Module d'un produit, module d'une puissance. 		<p>Exemples d'utilisation de TICE</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ensemble de Mandelbrot et ensemble de Julia. • Transformation du plan :>>> Film « Dimensions » > <i>Etude d'une similitude.</i>
7	Graphes	<ul style="list-style-type: none"> • Graphes, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet. • Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe. 	<ul style="list-style-type: none"> • Modéliser une situation par un graphe. • Dans le cadre de la résolution de problèmes, calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe. 		2s	<p>Problèmes possibles</p> <ul style="list-style-type: none"> • Chaînes Eulériennes : Problème des ponts de Königsberg. • Problème type « réseau social »
8	Arithmétique 3^{ème} partie : PGCD, théorèmes de Bézout et Gauss	<ul style="list-style-type: none"> • PGCD de deux entiers naturels • Algorithme d'Euclide • Couples d'entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout • Théorème de Gauss 	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer le PGCD de deux entiers naturels. • Déterminer un inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux. • Résoudre des équations diophantiennes simples. 	<ul style="list-style-type: none"> • (Théorème de Bézout) • Théorème de Gauss 	4s	<p>Problèmes possibles</p> <ul style="list-style-type: none"> • Problèmes de « restes chinois » : les soldats du général Han Xin, les deux lunes, etc. • Cryptologie : déchiffrement affine, déchiffrement de Hill. <p>Exemples d'utilisation de TICE</p> <ul style="list-style-type: none"> • Algorithme d'Euclide. • Automatisation d'un décodage affine.
9	Les nombres complexes	<ul style="list-style-type: none"> • Forme trigonométrique. • Trigonométrie : formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire. 	<ul style="list-style-type: none"> • Passer d'une forme à l'autre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Formule $\cos(a + b)$ 	2s	

	4^{ème} partie : forme trigonométrique, forme exponentielle.	<ul style="list-style-type: none"> • Forme exponentielle. • Formules d'Euler et de Moivre. 	<ul style="list-style-type: none"> • Effectuer des calculs en choisissant une forme adaptée. • Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques. 	<i>Prolongement : formules de duplication.</i> <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer l'ensemble U_n 		
10	Les chaînes de Markov	<ul style="list-style-type: none"> • Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états. • Chaîne de Markov à 2 ou 3 états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé. • Pour 2 ou 3 états : interprétation des coefficients de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$. • Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à 2 ou 3 états. 	<ul style="list-style-type: none"> • Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états. • Etudier une chaîne de Markov à 2 ou 3 états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante). 		3s	Problèmes possibles Marche aléatoire sur un graphe
11	Arithmétique 4^{ème} partie : les nombres premiers.	<ul style="list-style-type: none"> • Les nombres premiers : définition, crible d'Eratosthène, curiosités, infinité, test de primalité. • Décomposition en produit de facteurs premiers. • Petit théorème de Fermat. 	<ul style="list-style-type: none"> • Etudier la primalité de certains nombres. • Etudier des problèmes de chiffrement. 	<ul style="list-style-type: none"> • L'ensemble des nombres premiers est infini. 	3s	Problèmes possibles <ul style="list-style-type: none"> • À la recherche de grands nombres premiers : les nombres de Mersenne et de Fermat. • Cryptologie : le système RSA. • Nombres de Carmichael Exemples d'utilisation de TICE <ul style="list-style-type: none"> • Algorithme test de primalité. • TP : automatisation sur tableur du test de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne. • TP : cryptologie : Codes déchiffrés par analyse fréquentielle puis système RSA – automatisation sur tableur.